Мамонов О.В. Задача о рациональном использовании двух ресурсов для предприятия, выпускающего два вида продукции, с учётом влияния относительного и абсолютного спроса/ Экономические исследования и разработки. - №1, 2019 г.
Доступ: http://edrj.ru/article/15-01-19

УДК 330.4

Мамонов О.В. Задача о рациональном использовании двух ресурсов для предприятия, выпускающего два вида продукции, с учётом влияния относительного и абсолютного спроса

The problem of rational use of two resources for the enterprise, which produces two types of products, taking into account the influence of relative and absolute demand

Мамонов Олег Владимирович
ФБГОУ ВО «Новосибирский ГАУ»
Mamonov Oleg. V.
Novosibirsk State Agrarian University

Аннотация. *Работа формирует математическую базу для исследования производства двух видов продукции, в котором используются два вида ресурсов, и наблюдается влияние двух факторов производства: относительного спроса на продукцию первого вида по отношению ко второму виду и абсолютного спроса на продукцию второго вида. В качестве инструмента создания такой базы используется модифицированная задача об использовании ресурсов, которая является задачей линейного программирования. Для формирования базы и исследования производства продукции используются коэффициенты построенной модели. Они определяют такие показатели производства, как относительный расход ресурсов по данному виду продукции, относительный расход данного вида ресурса на единицу продукции для каждого вида. В работе исследуется совместное влияние относительного и абсолютного спроса на продукцию двух видов при рациональном использовании двух ресурсов.*
Ключевые слова. *Задача линейного программирования, модифицированная задача использования ресурсов, относительный спрос на продукцию, абсолютный спрос на продукцию, показатели расхода ресурсов по видам продукции, отношение запасов ресурсов, отношение дохода продукции одного вида к другому, предельная полезность ресурса, предельная оценка влияния спроса на выпуск продукции, дефицитный ресурс, избыточный ресурс.*
Annotation. *Work forms the mathematical base for exploring the production of two types of products, in which there are two types of resources, and there is the influence of two factors: the relative demand for the products of the first kind with respect to the second mind and the absolute demand for the latter. As a tool for the creation of such a database uses a modified task on the use of resources, which is the task of linear programming. To form a base and research are the coefficients of the model. They define the indicators of production, as a relative resource consumption for this type of products, this type of resource consumption relative to a production unit for each species. This paper deals with the joint influence of relative and absolute demand for the products of the two species with a rational use of the two resources.*
Keywords*. The linear programming task, modified the use of resources, the relative demand for products, the absolute demand for products, resource consumption indicators by types of products, the ratio of stocks, the ratio of income products one species to another, marginal utility, resource assessment of the impact of demand for production, scarce resource, excess resource.*

Введение

Математические методы являются одним из наборов инструментов, с помощью которого могут исследоваться экономические процессы и решаться экономические задачи. Среди математических методов достаточно широко используются методы линейного программирования. В качестве одной из моделей производства продукции используется задача об использовании ресурсов. Данная работа является продолжением исследования решения задачи об использовании ресурсов и её модификаций, учитывающих влияние внутренних и внешних факторов. Задача об использовании двух ресурсов в производстве двух видов продукции исследовалась в работе [1], в которой были описаны решения задачи при различных условиях и значениях параметров задачи. Влияние спроса на оба вида продукции было рассмотрено в работе [2], в которой в качестве модели производства была выбрана модифицированная модель задачи об использовании ресурсов. В модифицированную модель были включены ограничения на количество выпускаемой продукции обоих видов. Влияние внутренних факторов производство было исследовано в работе [3], где в качестве факторов рассматривались две нормы выпуска: относительная и абсолютная. В данной работе предлагается к исследованию модифицированная модель задачи об использовании ресурсов, в которой рассматривается влияние двух видов спроса: относительного и абсолютного. Из всех решений этой задачи будем рассматривать оптимальные планы производства, при которых продукция обоих видов выпускается на уровне, удовлетворяющем обоим видам спроса, и ресурсы используются рационально, расходуются без остатка.

1. Постановка задачи о влиянии относительного и абсолютного спроса на выпуск продукции и анализ коэффициентов модифицированной задачи об использовании ресурсов

1.1. Модифицированная модель задачи об использовании ресурсов с учётом влияния спроса на продукцию

Определим ограничение в задаче использования ресурсов, в которых учитывается влияние относительного и абсолютного спроса на выпуск продукции.

Будем полагать, что спрос на продукцию вида A_1 превышает спрос на продукцию вида A_2 на n_1. Это ограничение будем понимать, как факт того, что предприятие должно выпускать продукцию A_1 не менее, чем на n_1 единиц больше, чем продукцию A_2. Тогда ограничение на относительный спрос продукции A_1 по отношению к продукции A_2 будет иметь вид:

$$x_1 - x_2 \geq n_1. \tag{1.2}$$

Второе ограничение – это ограничение на спрос продукции A_2. Оно означает, что продукции A_2 предприятие должно выпускать в количестве не более n_2 единиц. Это ограничение запишем в виде:

$$x_2 \leq n_2. \tag{1.3}$$

Учитывая ограничения на использование ресурсов,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \tag{1.4}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \tag{1.5}$$

получаем модифицированную задачу об использовании двух ресурсов в производстве двух видов продукции с учётом влияния относительного и абсолютного спроса.

Сформулируем модифицированную задачу использования ресурсов, которая учитывает влияние относительной и абсолютной нормы.

Предприятие производит два вида продукции, вида A_1 и вида A_2, используя два вида ресурсов, R_1 и R_2. На единицу продукции A_1 требуется a_{11} ед. ресурса R_1 и a_{21} ед. ресурса R_2, на единицу продукции A_2 требуется a_{12} ед. ресурса R_1 и a_{22} ед. ресурса R_2. Доход от реализации единицы продукции A_1 составляет c_1 руб., единицы продукции A_2 – c_2 руб. Необходимо составить такой план выпуска продукции A_1 и A_2, чтобы при запасе ресурса R_1 в количестве b_1 ед., ресурса R_2 в количестве b_2 ед. доход предприятия был максимальным, если продукции A_1 должно быть не менее, чем на n_1 ед. больше продукции A_2, а продукции A_2 не более n_2 ед.

Математической моделью этой задачи будет задача линейного программирования:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \le b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \le b_2 \\ x_1 & -x_2 & \ge n_1 \\ & x_2 & \le n_2 \end{cases} \qquad (1.6)$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

$$Z = \quad c_1x_1 \quad +c_2x_2 \quad \to max.$$

В этой задаче Z – доход предприятия.

Задачу (1.6) дальше будем называть модифицированной задачей об использовании ресурсов с учётом влияния спроса.

Двойственной задачей к задаче (1.6) будет задача линейного программирования, которая имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 & +a_{12}u_2 & +u_3 & & \ge c_1 \\ a_{11}u_1 & +a_{22}u_2 & -u_3 & +u_4 & \ge c_2 \end{cases} \qquad (1.7)$$

$$u_1 \ge 0 \quad u_2 \ge 0 \quad u_3 \le 0 \quad u_4 \le 0$$

$$W = \quad b_1u_1 \quad +b_2u_2 \quad +n_1u_3 \quad +n_2u_4 \quad \to min.$$

Прямую задачу (1.6) называют задачей об использовании ресурсов в натуральном виде, а двойственную, (1.7), задачей в стоимостном виде.

Целью исследований будем рассматривать вопрос о нахождении общего расширенного решения пары задач (1.6) и (1.7), при котором продукция выпускается согласно относительного и абсолютного спроса и ресурсы используются рационально, без остатка. Это означает, что все ограничения задачи (1.6) при таком оптимальном плане выполняются как равенства.

Найдём план, удовлетворяющий условиям производства, при которых продукция выпускается согласно спроса и ресурсы используются полностью. Так как выпуск продукции осуществляется по абсолютному спросу, то x_2*=n_2. Так как выпуск осуществляется по относительному спросу, то x_1*= x_2*+n_1, откуда следует, что x_1*= n_1+n_2. Поэтому на оптимальность будем исследовать план

$$X_0=(n_1 + n_2\,; n_2). \qquad (1.8)$$

Дополнительные переменные для плана (1.8) будут иметь значения равные нулю

$$Y_0=(0\,; 0; 0; 0). \qquad (1.9)$$

Доход при плане X_0 равен

$$Z_{max}=c_1(n_1 + n_2) + c_2n_2. \qquad (1.10)$$

1.2. Определение и анализ вспомогательных коэффициентов модифицированной модели

Для анализа решения задачи будем использовать коэффициенты модели, которые были рассмотрены в [1-3].

Их определим как в работе [3]. Они определяются следующим образом.

Первая группа коэффициентов – это коэффициенты, определяющие для каждого ресурса относительный расход ресурса в производстве единицы продукции A_2 и единицы продукции A_1 . Коэффициент k_1 равен отношению $\frac{a_{12}}{a_{11}}$, коэффициент k_2 равен отношению $\frac{a_{22}}{a_{21}}$. Полагаем, что $k_1<k_2$.

Вторая группа коэффициентов – это коэффициенты, определяющие относительный расход ресурсов R_1 и R_2 в производстве единицы продукции конкретного вида. Коэффициент β_1 определяется для продукции A_1 и равен отношению $\frac{a_{21}}{a_{11}}$, коэффициент β_2 для продукции A_2 и равен отношению $\frac{a_{22}}{a_{12}}$. В [1-2] было доказано, что из неравенства $k_1<k_2$ следует отношение $\beta_1<\beta_2$.

В третью группу коэффициентов включим два коэффициента. Первый коэффициент определяет отношение дохода от реализации единицы продукции вида A_2 к доходу от реализации единицы продукции вида A_1. Его обозначим k, он равен отношению $\frac{c_2}{c_1}$. Второй коэффициент равен отношению запасов ресурсов вида R_2 и R_1. Его обозначим β, он равен отношению $\frac{b_2}{b_1}$.

2. Методология, методы и методика исследований

При исследовании задачи об использовании ресурсов формируется экономико-математическая модель. Для её построения используется методология математического моделирования, которая предполагает построение экономико-математической модели расхода ресурсов в производстве продукции. Методология определяет представление исходной задачи как задачи линейного программирования, а также её решение, анализ полученных решений и формирования выводов для их использования в принятии экономических решений. Исследование заканчивается проверкой степени соответствия построенной модели реальному производству и выработке условий, при которых можно использовать выводы проведённого исследования.

Решение и анализ задачи об использовании ресурсов осуществляется методами линейного программирования, которые широко используются при решении различных задач, в которых наблюдаются линейные связи между исследуемыми величинами.

В качестве методики анализа полученного решения используется теория двойственности в линейном программировании. С её помощью вырабатываются выводы по полученным решениям, а также формируются условия, при которых можно использовать экономико-математическую модель задачи.

3. Результаты

Переходим к исследованию плана (1.8) на оптимальность. Повторимся, что при этом плане продукция обоих видов выпускается согласно обоим видам спроса и оба ресурса расходуются полностью. Это означает, что все дополнительные переменные прямой задачи равны нулю: $y_1=y_2=y_3=y_4=0$. Значение целевой функции при плане (1.8) равно $c_1(n_1+(1+k)n_2)$ (1.10).

Если план (1.8) будет оптимальным, то в прямой задаче все ограничения будут равенствами и удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* & +a_{12}x_2^* & =b_1 \\ a_{21}x_1^* & +a_{22}x_2^* & =b_2 \\ x_1^* & -x_2^* & =n_1 \\ & x_2^* & =n_2 \end{cases}. \quad (3.1)$$

Из этих уравнений следует, что запасы ресурсов равны

$$b_1=b_{10}=a_{11}(n_1+n_2)+a_{12}n_2, \quad (3.2)$$

$$b_2=b_{20}=a_{21}(n_1+n_2)+a_{22}n_2. \quad (3.3)$$

Значения b_{10} и b_{20} являются количествами ресурсов R_1 и R_2, при которых продукция производится по обоим видам спроса.

Перейдём к решению двойственной задачи. Считаем, что расширенный план (X_0; Y_0) оптимальный. Составляем условия «дополняющей нежёсткости» для расширенного решения задачи.

Объёмы выпускаемой продукции при плане (1.8) не равны нулю. Значит, оба ограничения в двойственной задаче являются равенствами:

$$a_{11}u_1 \quad +a_{21}u_2 \quad +u_3 \quad\quad =c_1 \quad (3.4)$$

$$a_{12}u_1 \quad +a_{22}u_2 \quad -u_3 \quad +u_4 \quad =c_2 \quad (3.5)$$

Так как все ограничения в прямой задаче являются равенствами, то оптимальные значения переменных в двойственной задаче удовлетворяют условиям u_1*≥0, u_2*≥0, u_3*≤0 и u_4*≥0.

Получаем в двойственной задаче систему двух уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}u_1^* & +a_{12}u_2^* & +u_3^* & & =c_1 \\ a_{11}u_1^* & +a_{22}u_2^* & -\beta_0u_3^* & +u_4^* & =c_2 \end{cases}. \quad (3.6)$$

где u_1*≥0, u_2*≥0, u_3*≤0 и u_4*≥0.

Найдём общее решение системы (3.6), учитывая, что u_1*≥0, u_2*≥0, u_3*≤0, u_4*≥0.

В первом уравнении выразим u_3* через u_1* и u_2*:

$$u_3^*=c_1-a_{11}u_1^*-a_{21}u_2^*. \quad (3.7)$$

Подставим выражение для u_3* во второе уравнение:

$$a_{12}u_1^*+a_{22}u_2^*-(c_1-a_{11}u_1^*-a_{21}u_2^*)+u_4^*=c_2. \quad (3.8)$$

В уравнении (3.8) выражаем u_4* через u_1* и u_2*:

$$u_4^*=c_2+c_1-(a_{11}+a_{12})u_1^*-(a_{21}+a_{22})u_2^*. \quad (3.9)$$

Так как $c_2=kc_1$, то

$$u_4^*=c_1(1+k)-a_{11}u_1^*(1+k_1)-a_{21}u_2^*(1+k_2). \quad (3.10)$$

Положим, что

$$u_1^*=\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t, \tag{3.11}$$

$$u_2^*=\frac{c_1}{a_{21}}\cdot\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s, \tag{3.12}$$

тогда

$$u_4^*=c_1(1+k)(1-t-s). \tag{3.13}$$

Так как $u_1^*\geq 0$, $u_2^*\geq 0$ и $u_4^*\geq 0$, то на параметры t и s накладываются условия:

$$t\geq 0,\ s\geq 0 \tag{3.14}$$

и

$$1-t-s\geq 0. \tag{3.15}$$

Последнее условие запишем в виде:

$$t+s\leq 1. \tag{3.16}$$

Теперь найдём u_3^*. Подставим u_1^* и u_2^* в первое уравнение:

$$u_3^*=c_1-c_1\cdot\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t-c_1\cdot\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s=c_1\left(1-\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t-\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s\right). \tag{3.17}$$

Выражение в (3.18) запишем в виде:

$$u_3^*=-c_1\left(\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t+\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s-1\right). \tag{3.18}$$

Так как $u_3^*\leq 0$, то

$$\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t+\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s\geq 1. \tag{3.19}$$

В результате получаем систему условий для t и s:

$$\begin{cases} t+s \leq 1 \\ \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t+\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s \geq 1 \end{cases}, \tag{3.20}$$

где $t\geq 0$, $s\geq 0$.

Рассмотрим решение системы в зависимости от значений параметра k. Последовательно будем искать решение двойственной задачи в случаях, когда $k<k_1$, $k=k_1$, $k_1<k<k_2$, $k=k_2$, $k>k_2$.

3.1. Общее решение при $k<k_1$

Пусть $k<k_1$, тогда справедливы два неравенства при $t>0$, $s>0$:

$$\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t<\frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t=t, \tag{3.21}$$

$$\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s<\frac{\beta_0+k_2}{\beta_0+k_2}\cdot s=s. \tag{3.22}$$

В результате получаем, что при $t>0$, $s>0$

$$\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t+\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s<t+s. \tag{3.23}$$

При $t>0$ или $s>0$ получаем противоречие:

$$1\leq\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t+\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s<t+s\leq 1. \tag{3.24}$$

Это означает, что планы (3.11) – (3.13) и (3.18) при условиях на параметры (3.14), (3.16) и (3.19) в двойственной задаче не могут быть оптимальными. План (1.8) не оптимальный в прямой задаче.

Противоречие (3.24) будет и при $t=s=0$, та как $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t+\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s=0<1$, не выполняется условие (3.19). Поэтому при $k<k_1$, план (1.8) оптимальным не будет.

3.2. Общее решение при $k=k_1$

Рассмотрим случай, когда $k=k_1$. Проверим условия «дополняющей нежёсткости»:

$v_1^*=0$, $v_2^*=0$, $u_1^*\geq 0$, $u_2^*\geq 0$, $u_3^*\leq 0$ и $u_4^*\geq 0$. (3.25)

Для параметра t будет справедливо равенство

$$\frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t=t, \tag{3.26}$$

а для параметра $s>0$ условие (3.22) сохраниться. Поэтому при $t\geq 0$ и $s>0$ справедливо неравенство (3.23), а при $t>0$ и $s=0$ будет справедливо

$$1\leq\frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t=t\leq 1. \tag{3.27}$$

Отсюда получаем, что при $k=k_1$ и $s=0$ выполняется равенство

$$\frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t+\frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_2}\cdot s=t+s=1. \tag{3.28}$$

При $k=k_1$ план (1.8) будет оптимальным (при $t=1$ и $s=0$), для которого в двойственной задаче:

$$u_1^*=\frac{c_1}{a_{11}}, \tag{3.29}$$

$$u_2^*=0, \tag{3.30}$$

$$u_3^*=0, \tag{3.31}$$

$$u_4^*=0. \tag{3.32}$$

Таким образом, при $k=k_1$ расширенным решением двойственной задачи будет:

$$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\ ;0;0;0\right),\ V^*=(0\ ;0). \tag{3.33}$$

Значение целевой функции равно

$$W_{\min}=c_1(n_1+(1+k_1)n_2). \tag{3.34}$$

3.3. Общее решение при $k_1<k<k_2$

Переходим к значениям $k_1<k<k_2$. В этом случае для параметра $t>0$ уже будет выполнятся неравенство

$$\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t>t, \tag{3.35}$$

а для параметра s также выполняется условие (3.22). Противоречия, как при $k<k_1$, нет, поэтому на параметры t и s накладывается система условий (3.14) и (3.20).

Рассмотрим предельные значения параметров t и s, при которых обращаются в ноль оптимальные значения хотя бы одной из переменных двойственной задачи.

Если $u_1^*=0$, то $t=0$. Получаем оптимальное решение: u_2^* как в (3.12)

$$u_1^*=0, \tag{3.36}$$

$$u_3^* = -c_1\left(\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s - 1\right), \quad (3.37)$$

$$u_4^* = c_1(1+k)(1-s), \quad (3.38)$$

где $s \geq 0$, $\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s \geq 1$, $s \leq 1$. Из второго неравенства следует, что $s \geq \frac{1+k_2}{1+k}$.

Отметим, что при $k<k_2$ выполняется неравенство $\frac{1+k_2}{1+k} > 1$. Поэтому на параметр s накладываются противоречивые условия

$$1 < \frac{1+k_2}{1+k} \leq s \leq 1. \quad (3.39)$$

Поэтому $u_1^* \neq 0$.

Если $u_2^*=0$, то $s=0$. Получаем оптимальное решение: u_1^* как в (3.11),

$$u_2^*=0, \quad (3.40)$$

$$u_3^* = -c_1\left(\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t - 1\right), \quad (3.41)$$

$$u_4^* = c_1(1+k)(1-t), \quad (3.42)$$

где $t \geq 0$, $\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t \geq 1$, $t \leq 1$. Из второго неравенства следует, что $t \geq \frac{1+k_1}{1+k}$. Отметим, что при $k>k_1$ выполняется неравенство $\frac{1+k_1}{1+k} < 1$. Поэтому на параметр t накладываются условия в виде двойного неравенства

$$\frac{1+k_1}{1+k} \leq t \leq 1. \quad (3.43)$$

Таким образом, при $k_1<k<k_2$ одним из множеств решений будут планы:

$$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t\,;0;-c_1\left(\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t - 1\right);c_1(1+k)(1-t)\right),\ V^*=(0\,;0). \quad (3.44)$$

где на параметр t накладывается условие $\frac{1+k_1}{1+k} \leq t \leq 1$.

Значение $W_{\min}$ будет равно

$$W_{\min}= c_1(n_1+(1+k)n_2). \quad (3.45)$$

Посмотрим случай, когда $u_3^*=0$. Тогда параметры t и s удовлетворяют условию

$$\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t + \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s = 1, \quad (3.46)$$

а также условиям (3.14) и (3.16).

Получаем оптимальное решение: u_1^* как в (3.11), u_2^* как в (3.12), u_4^* как в (3.13):

$$u_1^*=\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t,\quad u_2^*=\frac{c_1}{a_{21}}\cdot\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s, u_4^* = c_1(1+k)(1-t-s), u_3^* = 0, \quad (3.47)$$

где параметры t и s удовлетворяют условиям (3.14), (3.16) и (3.46).

Преобразуем условия (3.16) и (3.46):

$$1-t-s = \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t + \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s - t - s, \quad (3.48)$$

Тогда

$$1-t-s = \frac{k-k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t - \frac{k_2-k}{\beta_0+k_2}\cdot s. \quad (3.49)$$

Получаем, что

$$u_4^* = c_1(1+k)\left(\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t - \frac{k_2-k}{\beta_0+k_2}\cdot s\right), \quad (3.50)$$

и должно выполняться условие

$$\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t-\frac{k_2-k}{\beta_0+k_2}\cdot s\geq 0. \quad (3.51)$$

Из (3.51) получаем условие для t и s:

$$t\geq\frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_2}\cdot\frac{k_2-k}{k-k_1}\cdot s. \quad (3.52)$$

Итак, мы получили ещё одно множество решений при $k_1<k<k_2$ и условии (3.46):

$$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t\,;\frac{c_1}{a_{21}}\cdot\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s; 0; c_1(1+k)\left(\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t-\frac{k_2-k}{\beta_0+k_2}\cdot s\right)\right), \quad (3.53)$$

$$V^*=(0\,;0), \quad (3.54)$$

где параметры t и s удовлетворяют условиям $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t+\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s=1$, $t\geq\frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_2}\cdot\frac{k_2-k}{k-k_1}\cdot s\geq 0$. Значение $W_{\min}$ такое же, как и в (3.45).

Рассмотрим случай, когда u_4*=0. Тогда параметры t и s удовлетворяют условию

$$t+s=1, \quad (3.55)$$

а также условиям (3.14) и (3.19).

Получаем оптимальное решение: u_1* из (3.11), u_2* из (3.12), u_3* из (3.18), а

$$u_4^*=0. \quad (3.56)$$

где параметры t и s удовлетворяют условиям (3.14), (3.19) и (3.55).

Преобразуем условия (3.19) и (3.55):

$$\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t+\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s-1=\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t+\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s-t-s. \quad (3.57)$$

Из (3.57) получаем:

$$\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t+\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s-1=\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t-\frac{k_2-k}{\beta_0+k_2}\cdot s. \quad (3.58)$$

Тогда u_3* равняется:

$$u_3^*=-c_1\left(\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t-\frac{k_2-k}{\beta_0+k_2}\cdot s\right). \quad (3.59)$$

Для u_3* должно выполняться условие

$$\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t-\frac{k_2-k}{\beta_0+k_2}\cdot s\leq 0. \quad (3.60)$$

Из (3.60) получаем условие для t и s:

$$t\leq\frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_2}\cdot\frac{k_2-k}{k-k_1}\cdot s. \quad (3.61)$$

Мы получили решение при $k_1<k<k_2$ и условии (3.55):

$$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t\,;\frac{c_1}{a_{21}}\cdot\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s; -c_1\left(\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t-\frac{k_2-k}{\beta_0+k_2}\cdot s\right); 0\right),\ V^*=(0\,;0), \quad (3.62)$$

где параметры t и s удовлетворяют условиям $t+s=1$, $0\leq t\leq\frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_2}\cdot\frac{k_2-k}{k-k_1}\cdot s$. Значение $W_{\min}$ такое же, как и в (3.45).

3.4. Общее решение при $k=k_2$

Рассмотрим случай, когда $k=k_2$.

Оптимальный план в двойственной задаче будет иметь вид:

$$u_1^*=\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t, \quad (3.63)$$

$$u_2^*=\frac{c_1}{a_{21}}\cdot s, \quad (3.64)$$

$$u_3^* = -c_1\left(\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t + s - 1\right), \quad (3.65)$$

$$u_4^* = c_1(1+k_2)(1-t-s), \quad (3.66)$$

где $t \geq 0$, $s \geq 0$, $\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t + s \geq 1, 1-t-s \geq 0$.

Последовательно рассмотрим граничные значения параметров t и s.

Если $u_1^*=0$, то $t=0$. Получаем: $u_1^*=0$, $u_2^*=\frac{c_1}{a_{21}}\cdot s, u_3^* = -c_1(s-1)$,

$$u_4^* = c_1(1+k_2)(1-s), \quad (3.67)$$

где $s \geq 0$, $s \geq 1$ и $s \leq 1$. Отсюда получаем, что $s=1$.

При $t=0$ и $s=1$, получаем оптимальный план: $u_1^*=0$, $u_2^*=\frac{c_1}{a_{21}}$, $u_3^*=0$, $u_4^*=0$.

Запишем расширенное решений двойственной задачи при $t=0$ и $s=1$:

$$U^*=\left(0;\frac{c_1}{a_{21}};0;0\right),\ V^*=(0\,;0). \quad (3.68)$$

Значение целевой функции равно

$$W_{\min}= c_1(n_1+(1+k_2)n_2). \quad (3.69)$$

Если $u_2^*=0$, то $s=0$. Получаем оптимальное решение: $u_1^*=\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t$, $u_2^*=0$,

$$u_3^* = -c_1\left(\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t - 1\right), \quad (3.70)$$

$$u_4^* = c_1(1+k_2)(1-t), \quad (3.71)$$

где $t \geq 0$, $t \geq \frac{1+k_1}{1+k_2}$ и $t \leq 1$. Значит, $\frac{1+k_1}{1+k_2} \leq t \leq 1$.

Это решение:

$$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t; 0\,; -c_1\left(\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t - 1\right); c_1(1+k_2)(1-t)\right),\ V^*=(0\,;0). \quad (3.72)$$

где $\frac{1+k_1}{1+k_2} \leq t \leq 1$. Значения целевой функции равно (3.69).

Пусть $u_3^*=0$, тогда $\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t + s = 1$. Подставляем вместо единицы левую часть:

$$1-t-s = \frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t + s - t - s = \frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t - t=\frac{k_2-k_1}{1+k_1}\cdot t. \quad (3.73)$$

Тогда

$$u_4^* = c_1 t(k_2-k_1)\cdot\frac{1+k_2}{1+k_1}. \quad (3.74)$$

Получаем ещё одно решение двойственной задачи для $\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t + s = 1$:

$$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t; \frac{c_1}{a_{21}}\cdot s\,; 0; c_1 t(k_2-k_1)\cdot\frac{1+k_2}{1+k_1}\right),\ V^*=(0\,;0). \quad (3.75)$$

где $t \geq 0$, $s \geq 0$, $\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t + s = 1$. Значение целевой функции равно (3.69).

Рассмотрим случай, когда $u_4^*=0$. Тогда параметры t и s удовлетворяют условию (3.49): $t+s=1$.

Оптимальные значения переменных будут равны: $u_1^*=\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t$, $u_2^*=\frac{c_1}{a_{21}}\cdot s$, $u_3^*=-c_1\left(\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t+s-1\right)$, $u_4^*=0$, где параметры t и s удовлетворяют условиям (15), (20) и (49), а именно $t\geq 0$, $s\geq 0$, $\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t+s\geq 1$ и $t+s=1$.

В выражение $\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t+s-1$ подставим вместо единицы $t+s$. Получим: $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t+\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s-t-s=\frac{k_2-k_1}{1+k_1}\cdot t$. Тогда

$$u_3^*=-c_1\cdot\frac{k_2-k_1}{1+k_1}\cdot t. \qquad (3.76)$$

Получаем множество решений при $k=k_2$ и условии (3.49):

$$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t\,;\frac{c_1}{a_{21}}\cdot s;-c_1\cdot\frac{k_2-k_1}{1+k_1}\cdot t;0\right),\ V^*=(0\,;0), \qquad (3.77)$$

где параметры t и s удовлетворяют условиям $t\geq 0$, $s\geq 0$ и $t+s=1$. Значение $W_{\min}$ такое же, как в (3.69).

3.5. Общее решение при $k>k_2$

Рассмотрим оптимальное решение (1.8), когда $k>k_2$. Для параметра $t>0$ будет выполняться неравенство (3.35) $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t>t$, а для параметра s условие

$$\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s>\frac{\beta_0+k_2}{\beta_0+k_2}\cdot s=s. \qquad (3.78)$$

Рассмотрим предельные значения параметров t и s.

Если $u_1^*=0$, то $t=0$. Получаем оптимальное решение: $u_1^*=0$, $u_2^*=\frac{c_1}{a_{21}}\cdot\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s$, $u_3^*=-c_1\left(\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s-1\right)$, $u_4^*=c_1(1+k)(1-s)$, где $s\geq 0$, $\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s\geq 1$, $s\leq 1$. Из второго неравенства следует, что $s\geq\frac{1+k_2}{1+k}$. Отметим, что при $k>k_2$ выполняется неравенство $\frac{1+k_2}{1+k}<1$. Поэтому на параметр s накладываются условие

$$\frac{1+k_2}{1+k}\leq s\leq 1. \qquad (3.79)$$

Получаем оптимальное решение

$$U^*=\left(0\,;\frac{c_1}{a_{21}}\cdot\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s;-c_1\left(\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s-1\right);c_1(1+k)(1-s)\right),\ V^*=(0\,;0), \qquad (3.80)$$

где $\frac{1+k_2}{1+k}\leq s\leq 1$. Значение $W_{\min}$ такое же, как в (3.45).

Если $u_2^*=0$, то $s=0$. Получаем оптимальное решение: $u_1^*=\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t$, $u_2^*=0$, $u_3^*=-c_1\left(\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t-1\right)$, $u_4^*=c_1(1+k)(1-t)$, где $t\geq 0$, $t\geq\frac{1+k_1}{1+k}$, $t\leq 1$.

Записываем оптимальный план:

$$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t\,;0;-c_1\left(\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t-1\right);c_1(1+k)(1-t)\right),\ V^*=(0\,;0). \qquad (3.81)$$

где на параметр t накладывается условие $\frac{1+k_1}{1+k} \le t \le 1$.

Значение $W_{\min}$ такое же, как и в (3.45).

Пусть u_3*=0. Тогда параметры t и s удовлетворяют условию $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t + \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \cdot s = 1$, а также условиям (3.14) и (3.16). Значения переменных равны: u_1*=$\frac{c_1}{a_{11}} \cdot \frac{1+k}{1+k_1} \cdot t$, u_2*=$\frac{c_1}{a_{21}} \cdot \frac{1+k}{1+k_2} \cdot s$, $u_3^* = 0$, $u_4^* = c_1(1+k)(1-t-s)$, где параметры t и s удовлетворяют условиям (3.14), (3.16) и (3.46). Из (3.58) следует, что

$$1 - t - s = \frac{k-k_1}{\beta_0+k_1} \cdot t + \frac{k-k_2}{\beta_0+k_2} \cdot s. \tag{3.82}$$

Тогда

$$u_4^* = c_1(1+k)\left(\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1} \cdot t + \frac{k-k_2}{\beta_0+k_2} \cdot s\right). \tag{3.83}$$

Получаем оптимальный план:

$$U^* = \left(\frac{c_1}{a_{11}} \cdot \frac{1+k}{1+k_1} \cdot t\,; \frac{c_1}{a_{21}} \cdot \frac{1+k}{1+k_2} \cdot s; 0; c_1(1+k)\left(\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1} \cdot t + \frac{k-k_2}{\beta_0+k_2} \cdot s\right)\right), \tag{3.84}$$

$$V^* = (0\,; 0), \tag{3.85}$$

параметры t и s удовлетворяют условиям $t \ge 0$, $s \ge 0$ и $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t + \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \cdot s = 1$. Значение $W_{\min}$ такое же, как и в (3.46).

Рассмотрим случай, когда u_4*=0. Тогда параметры t и s удовлетворяют условию $t + s = 1$, а также условиям (3.14) и (3.19). Получаем оптимальное решение: u_1*=$\frac{c_1}{a_{11}} \cdot \frac{1+k}{1+k_1} \cdot t$, u_2*=$\frac{c_1}{a_{21}} \cdot \frac{1+k}{1+k_2} \cdot s$, $u_3^* = -c_1\left(\frac{1+k}{1+k_1} \cdot t + \frac{1+k}{1+k_2} \cdot s - 1\right)$, $u_4^* = 0$, где параметры t и s удовлетворяют условиям (15), (20) и (49).

Из (3.58) получаем, что $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t + \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \cdot s - 1 = \frac{k-k_1}{\beta_0+k_1} \cdot t - \frac{k_2-k}{\beta_0+k_2} \cdot s$.

Тогда

$$u_3^* = -c_1\left(\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1} \cdot t + \frac{k-k_2}{\beta_0+k_2} \cdot s\right). \tag{3.86}$$

Получаем оптимальный план при $k > k_2$ и условии $t + s = 1$:

$$U^* = \left(\frac{c_1}{a_{11}} \cdot \frac{1+k}{1+k_1} \cdot t\,; \frac{c_1}{a_{21}} \cdot \frac{1+k}{1+k_2} \cdot s; -c_1\left(\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1} \cdot t + \frac{k-k_2}{\beta_0+k_2} \cdot s\right); 0\right),\quad V^* = (0\,; 0), \tag{3.87}$$

где параметры t и s удовлетворяют условиям $t \ge 0$, $s \ge 0$ и $t + s = 1$. Значение $W_{\min}$ такое же, как и в (3.45).

4. Выводы

Для производства продукции двух видов с использование двух ресурсов и влиянием двух видов спроса, относительного и абсолютного, исследован на оптимальность план (1.8), при котором оба ресурса расходуются полностью, продукция выпускается согласно обоих видов спроса. Рассчитано максимальное значение показателя эффективности производства (3.45): $Z_{\max}$= $c_1(n_1 + (1+k_1)n_2)$.

Оптимальные значения предельных оценок полезностей ресурсов и влияния факторов зависят от отношения k коэффициентов эффективности производства видов продукции. Они изменяются в рамках предпочтения выпускаемой продукции.

В случае приоритета выпуска продукции A_1 ($k<k_1$) план (1.8) не может быть оптимальным.

В особых рыночных условиях, когда отношение доходов от единицы продукции второго и первого видов продукции пропорционально расходу ресурса R_1 по этим видам продукции ($k=k_1$), план (1.8) будет оптимальным при оценках использования ресурсов и влияния факторов (3.33): $U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\ ; 0; 0; 0\right)$.

В случае отсутствия приоритета при выпуске продукции ($k_1<k<k_2$) план (1.8) будет оптимальным. Оценка полезности ресурса R_1 для этого плана не равна нулю.

Если оценка полезности ресурса R_2 равна нулю, то оценки полезности ресурсов и влияния факторов определяются решением двойственной задачи (3.44):

$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t\ ; 0; -c_1\left(\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t-1\right); c_1(1+k)(1-t)\right)$, где на параметр t накладывается условие: $\frac{1+k_1}{1+k}\le t\le 1$.

Если оценка относительного спроса равна нулю, то решением двойственной задачи будет (3.53):

$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t\ ; \frac{c_1}{a_{21}}\cdot\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s; 0; c_1(1+k)\left(\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t-\frac{k_2-k}{\beta_0+k_2}\cdot s\right)\right)$, где

параметры t и s удовлетворяют условиям: $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t+\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s=1,\ t\ge\frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_2}\cdot\frac{k_2-k}{k-k_1}\cdot s\ge 0$.

Если оценка влияния абсолютного спроса равна нулю, то решением двойственной задачи будет (3.62):

$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t\ ; \frac{c_1}{a_{21}}\cdot\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s; -c_1\left(\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t-\frac{k_2-k}{\beta_0+k_2}\cdot s\right); 0\right)$, где параметры t и s удовлетворяют условиям: $t+s=1, 0\le t\le\frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_2}\cdot\frac{k_2-k}{k-k_1}\cdot s$.

В особых рыночных условиях, когда отношение доходов от единицы продукции второго и первого видов продукции пропорционально расходу ресурса R_2 ($k=k_2$), план (1.8), как и в случае производства без приоритета, будет оптимальным при различных частных оценках использования ресурсов и влияния факторов.

При нулевой оценке ресурса R_1 оптимальное решение в двойственной задаче будет иметь вид (3.68): $U^*=\left(0; \frac{c_1}{a_{21}}\ ; 0; 0\right)$.

При нулевой оценке ресурса R_2 оптимальным будет решение (3.72):

$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t; 0\ ; -c_1\left(\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t-1\right); c_1(1+k_2)(1-t)\right)$, где $\frac{1+k_1}{1+k_2}\le t\le 1$.

Если нулю равна оценка влияния относительного спроса, то в двойственной задаче оптимальным будет решение (3.75):

$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t;\frac{c_1}{a_{21}}\ ;0;c_1t(k_2-k_1)\cdot\frac{1+k_2}{1+k_1}\right)$, где $t\geq0$, $s\geq0$, $\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t+s=1$.

При нулевой оценке влияния абсолютного спроса в двойственной задаче оптимальным будет решение (3.77):

$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k_2}{1+k_1}\cdot t\ ;\frac{c_1}{a_{21}}\cdot s;-c_1\cdot\frac{k_2-k_1}{1+k_1}\cdot t;0\right)$, параметры t и s удовлетворяют условиям $t\geq0$, $s\geq0$ и $t+s=1$.

В случае приоритета выпуска продукции A_2 ($k>k_2$) план (1.8) будет оптимальным.

При нулевой оценке полезности ресурса R_1 решение двойственной задачи будет иметь вид (3.80):

$U^*=\left(0\ ;\frac{c_1}{a_{21}}\cdot\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s;-c_1\left(\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s-1\right);c_1(1+k)(1-s)\right)$, где $\frac{1+k_2}{1+k}\leq s\leq1$.

При нулевой оценке полезности ресурса R_2 решением двойственной задачи будет (3.81):

$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t\ ;0;-c_1\left(\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t-1\right);c_1(1+k)(1-t)\right)$, где на параметр t накладывается условие $\frac{1+k_1}{1+k}\leq t\leq1$.

Решением двойственной задачи при нулевой оценке влияния относительного спроса будет (3.84):

$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t\ ;\frac{c_1}{a_{21}}\cdot\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s;0;c_1(1+k)\left(\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t+\frac{k-k_2}{\beta_0+k_2}\cdot s\right)\right)$, параметры t и s удовлетворяют условиям $t\geq0$, $s\geq0$ и $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}\cdot t+\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\cdot s=1$.

Решением двойственной задачи при нулевой оценке влияния абсолютного спроса будет (3.87):

$U^*=\left(\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{1+k}{1+k_1}\cdot t\ ;\frac{c_1}{a_{21}}\cdot\frac{1+k}{1+k_2}\cdot s;-c_1\left(\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1}\cdot t+\frac{k-k_2}{\beta_0+k_2}\cdot s\right);0\right)$, где параметры t и s удовлетворяют условиям $t\geq0$, $s\geq0$ и $t+s=1$. Рассмотрим случай, когда u_4*=0. Тогда параметры t и s удовлетворяют условию $t+s=1$, а также условиям (3.14) и (3.19).

С помощь рассчитанных решений двойственной задачи можно экономический анализ использования ресурсов, влияния факторов и дать им количественную и качественную оценку. На основе экономического анализа выработать управленческие решения по повышению дохода предприятия.

Библиографический список

1. Мамонов О.В. Анализ эффективного использования двух ресурсов для предприятия, выпускающего два вида продукции // Агропродовольственная экономика: научно-практический электронный журнал. Нижний Новгород: НОО «Профессиональная наука» - No12 - 2016. – 30-62 с.

2. Мамонов О.В. Анализ влияния спроса продукции и запаса ресурса на показатель эффективности производства, выпускающего два вида продукции //

Агропродовольственная экономика: научно-практический электронный журнал. Нижний Новгород: НОО «Профессиональная наука» - No2 - 2018. – 20-32 с.

3. Мамонов О.В., Бикеева М.В. Решение задачи об использовании двух ресурсов для предприятия, выпускающего два вида продукции, с учётом влияния минимальной относительной нормы производства одного вида продукции к другому и минимальной нормы выпуска продукции второго вида// Агропродовольственная экономика: научно-практический электронный журнал. Нижний Новгород: НОО «Профессиональная наука» - No3 - 2018. – 22-41 с.

4. О. В. Мамонов. Анализ использования двух ресурсов предприятия с двумя видами продукции с помощью графического способа решения задачи линейного программирования: Агропродовольственная экономика: научно-практический электронный журнал. Нижний Новгород: НОО «Профессиональная наука» - No10 - 2016. – 7-42 с.

5. О. В. Мамонов, Р. В. Луцик. Пример расчёта оценки влияния спроса на доход предприятия с двумя ресурсами: сб. трудов научно-практической конференции преподавателей, студентов, магистрантов и аспирантов Новосибирского государственного аграрного университета (г. Новосибирск, 16-17 октября 2017 г.), выпуск 2. / Новосиб. гос. аграр. ун-т. – Новосибирск: ИЦ «Золотой колос», 2017. – 365 с.

6. О. В. Мамонов, С. В. Егорова, А. А. Пугачёва. Влияние спроса продукции двух видов и запаса ресурса на эффективность производства/ Теория и практика современной аграрной науки: сб. национальной (всероссийской) научной конференции (г. Новосибирск, 20 февраля 2018 г.) / Новосиб. гос. аграр. ун-т. – Новосибирск: ИЦ «Золотой колос», 2017. – 903 с.

7. Р.Ш. Хуснутдинов. Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 224 с., 500 экз.

8. Экономико-математические методы в примерах и задачах: Учеб. пос. / А.Н. Гармаш, И.В.Орлова, Н.В.Концевая и др.; Под ред. А.Н.Гармаша - М.: Вуз. уч.: НИЦ ИНФРА-М, 2014 - 416с., 700 экз.

9. Экономическая теория. Микроэкономика: Учебник/ Под ред. Г. П. Журавлёвой - ИТК «Дашков и К, 2014. - 914 с.

10. В. В. Федосеев. Экономико-математические модели и прогнозирование рынка труда: Учеб. пособие - 2-е изд., доп. и испр. - М.: Вузовский учебник, 2010. - 144 с., 500 экз.