Никоноров В.М. Вопросы устойчивости экономической системы: особые точки/ Экономические исследования и разработки. - №5, 2019 г.
Доступ: http://edrj.ru/article/11-05-19

УДК 330.4

Никоноров В.М. Вопросы устойчивости экономической системы: особые точки

Issues of sustainability of the economic system: special points

Никоноров В.М.
К.э.н., доцент ВШУБ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Nikonorov V.M.
Ph.D., Associate Professor VSHUB
St. Petersburg Polytechnic University of Peter the Great

Аннотация. *Автор осветил значимость устойчивости экономической системы. На примере экономической системы, которую можно описать линейным дифференциальным уравнением второго порядка, рассмотрел особые точки подобной системы. Предложил применять для оценки устойчивости экономической системы особые точки.*

Ключевые слова*: Математическая модель, дифференциальное уравнение, определитель, особая точка, матрица.*

Abstract. *The author covered the importance of stability of an economic system. On the example of an economic system which can be described the linear differential equation of the second order considered special points of a similar system. Suggested to apply special points to assessment of stability of an economic system.*

Keywords: *Mathematical model, differential equation, determinant, special point, matrix.*

Актуальность. Экономическая система создана для обеспечения социума соответствующими товарами и услугами. Например, задача розничной торговли – снабжение населения страны продовольственными и непродовольственными товарами. Задача системы образования – обеспечение населения страны образовательными услугами и т.д. Автору представляется, что устойчивость экономических систем является ключевым фактором развития и процветания населения страны.

Объект исследования – экономическая система.

Предмет исследования – устойчивость экономической системы.

Цель исследования – выявление подходов к оценке устойчивости экономической системы.

Методы исследования: дифференциальное исчисление, изоморфизм.

Системный подход к изучению сложной социально-экономической системы рассмотрен в [1,2,3,4].

Экономическую систему можно описать экономико-математической моделью. Так как экономическая система – динамическая система, то возможно применить аппарат дифференциальных уравнений, т.е. построить экономико-математическую модель как систему дифференциальных уравнений или свести эту систему к одному дифференциальному уравнению, характеристическому уравнению. Отметим, что здесь и далее речь идет о линейных дифференциальных уравнениях

Если порядок характеристического уравнения равен 2, то для оценки устойчивости системы можно применить особые точки.

«Вообще говоря, состояниям равновесия динамической системы соответствуют на фазовой плоскости особые точки уравнения интегральных кривых и, обратно, особые точки соответствуют состояниям равновесия.» [5]

На физическом уровне состояние равновесия системы означает, что скорости и ускорения равны нулю, то есть система устойчива. Если ускорения равны нулю, то, соответственно, силы, действующие на систему также равны нулю.

Экономическая система, которой соответствует уравнение второго порядка, может быть описана двумя уравнениями первого порядка (1).

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Матрица этой системы A (2).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Тогда определитель для системы (1) можно записать в виде (3).

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Эта система устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические корни $\lambda_j(A)$ матрицы A обладают неположительными вещественными частями [6]. Рассмотрим все варианты $\lambda_j(A)$ для невырожденной матрицы A. Так как одни из них обеспечивают устойчивость, другие – неустойчивость. То есть те значения $\lambda_j(A)$, при которых D=0 и есть в нашем случае особые точки (1).

Возможны следующие варианты для собственных значений λ.

1) λ1 >0, λ2>0

Этому решению соответствует особая точка – неустойчивый узел. Решение (3) имеет вид:

$$x_1(t) = x_{10}e^{\lambda_1 t}$$

$$x_2(t) = x_{20}e^{\lambda_2 t}$$

Очевидно, что при положительных λ1, λ2 $x_1(t)$ и $x_2(t)$ устремляются в $+\infty$ при $t \to +\infty$.

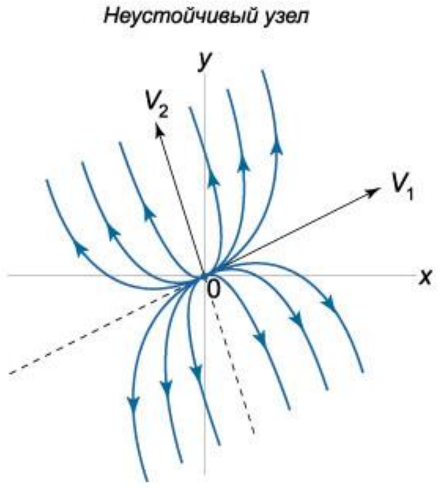

Рис.1. Неустойчивый узел

Здесь неустойчивый узел показан в исходных координатах x,y и в диагонализирующем базисе v1,v2. v1,v2 – собственные вектора матрицы A.

2) $\lambda1 < 0, \lambda2 < 0$

Этому решению соответствует особая точка – устойчивый узел.

Точка равновесия (0;0).

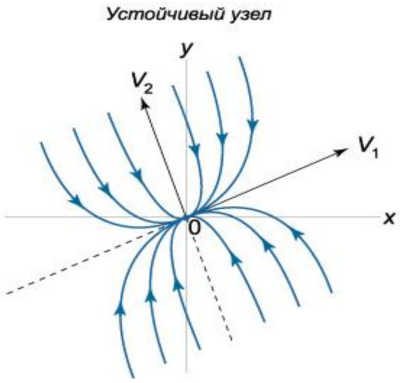

Рис.2. Устойчивый узел

Здесь неустойчивый узел показан в исходных координатах x,y и в диагонализирующем базисе v1,v2.

3) λ1, λ2 действительные числа разных знаков.

Этому решению соответствует особая точка – седло. Это неустойчивая особая точка.

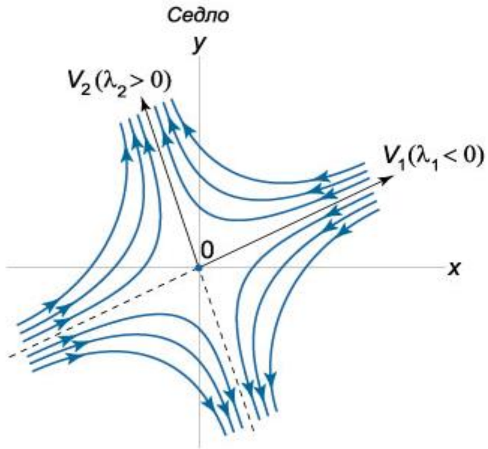

Рис.3. Седло

Здесь седло показано в исходных координатах x,y и в диагонализирующем базисе v1,v2.

4) λ1=a+bj; λ2=a-bj; a<0

Этому решению соответствует особая точка – устойчивый фокус. Фазовые кривые – логарифмические спирали. Они закручиваются, приближаясь к началу координат.

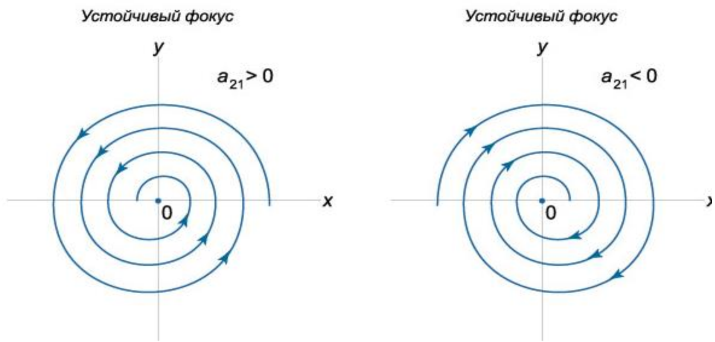

Рис.4. Устойчивый фокус

5) λ1=a+bj; λ2=a-bj; a>0

Этому решению соответствует особая точка – неустойчивый фокус.

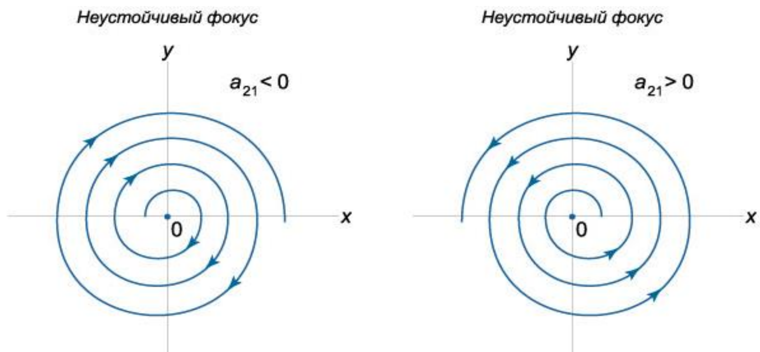

Рис.5. Неустойчивый фокус

Фазовые кривые – логарифмические спирали. Они раскручиваются, удаляясь от начала координат.

Если a21>0, то спирали закручиваются против часовой стрелки.

Если a21<0, то спирали закручиваются по часовой стрелке.

6) λ1=bj; λ2=-bj

Этому решению соответствует особая точка – центр. Это устойчивая особая точка. Фазовые кривые – эллипсы (окружности).

Если a21>0, то направление вращения против часовой стрелки.

Если a21<0, то направление вращения по часовой стрелке.

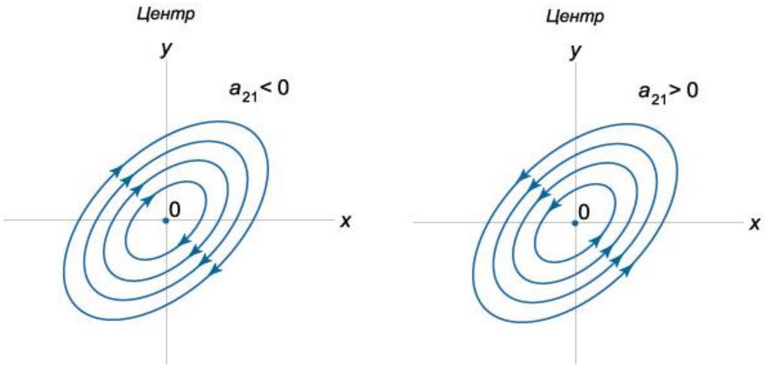

Рис.6. Центр

7) λ1=λ2=λ<0 (dim kerA=2)

Собственное подпространство A имеет размерность 2.

Этому решению соответствует особая точка – устойчивый дикритический узел. Это устойчивая особая точка.

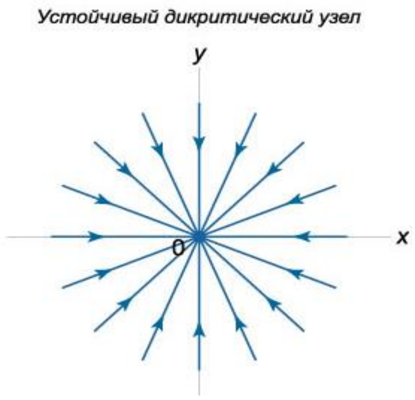

Рис.7. Устойчивый дикритический узел

8) λ1=λ2=λ>0 (dim kerA=2)

Собственное подпространство A имеет размерность 2. Этому решению соответствует особая точка – неустойчивый дикритический узел.

Рис.8. Неустойчивый дикритический узел

9) $\lambda 1=\lambda 2=\lambda<0$ (dim kerA=1)

Собственное подпространство A имеет размерность 1. Этому решению соответствует особая точка – устойчивый вырожденный узел. Это устойчивая особая точка.

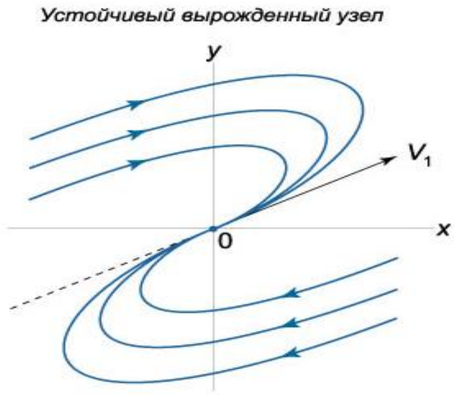

Рис.9. Устойчивый вырожденный узел

Здесь устойчивый вырожденный узел показан в исходных координатах x,y. У матрицы A есть только один собственный вектор v1. Второй линейно независимый вектор будет присоединенным к v1.

10) $\lambda 1=\lambda 2=\lambda>0$ (dim kerA=1)

Собственное подпространство A имеет размерность 1. Этому решению соответствует особая точка – неустойчивый вырожденный узел.

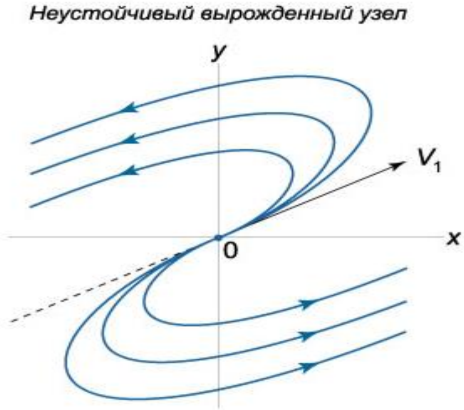

Рис.10. Неустойчивый вырожденный узел

Сведем имеющиеся данные в таблицу (табл.1).

Таблица 1

Особые точки автономной системы (3)

№	Решение (3)	Особая точка	Устойчивость
1	λ1 >0, λ2>0	Неустойчивый узел	Нет
2	λ1 <0, λ2<0	Устойчивый узел	Да
3	λ1 <0, λ2>0; λ1 >0, λ2<0	Седло	Нет
4	λ1=a+bj; λ2=a-bj; a<0 a21>0	Устойчивый фокус, закручивание против часовой стрелки	Да
5	λ1=a+bj; λ2=a-bj; a<0 a21<0	Устойчивый фокус, закручивание по часовой стрелке	Да
6	λ1=a+bj; λ2=a-bj; a>0 a21>0	Неустойчивый фокус, раскручивание против часовой стрелки	нет
7	λ1=a+bj; λ2=a-bj; a>0 a21<0	Неустойчивый фокус, раскручивание по часовой стрелке	нет
8	λ1=bj; λ2=-bj; a21>0	Центр, вращение против часовой стрелки	да
9	λ1=bj; λ2=-bj; a21<0	Центр, вращение по часовой стрелке	да
10	λ1=λ2= λ <0 (dim kerA=2)	Устойчивый дикритический узел	да
11	λ1=λ2= λ >0 (dim kerA=2)	Неустойчивый дикритический узел	нет
12	λ1=λ2= λ <0 (dim kerA=1)	Устойчивый вырожденный узел	да
13	λ1=λ2= λ >0 (dim kerA=1)	Неустойчивый вырожденный узел	нет

Результаты исследования.

1. Рассмотрены особые точки экономической системы, которую можно описать линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

2. Предложено применять особые точки для оценки устойчивости экономических систем (описываемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка).

Библиографический список

1. Whitehead A.N. Process and reality. N.-Y.: Macmillan company, 1967. 546 p.

2. L. Bertalanffy «Theoretische Biologie», Bd. I, Berlin, 1932. 122 p.

3. Ростова О.В., Ильин И.В. Методы информационного обеспечения инновационной деятельности // Наука и бизнес: пути развития. 2017. №2, с.30-35.

4. Ильин И.В. Зайченко И.М. Выбор стратегии развития предприятия на основе метода анализа иерархий // Наука и бизнес: пути развития. 2017. №1, с.29-36.

5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Л. Теория колебаний. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1959. – 918с.

6. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – СПб.: Лань, 2008.- 480с.