

УДК 330.45

Мамонов О.В. Использование теории двойственности в
экономическом анализе эффективного использования ресурсов
Use of duality theory in economic analysis of effective utilization of resources

Мамонов Олег Владимирович

Новосибирский государственный аграрный университет

Mamonov Oleg Vladimirovich

Novosibirsk State Agrarian University

***Аннотация.** В статье представлено методическое обеспечение работы коллектива авторов Новосибирского государственного аграрного университета по исследованию задачи об использовании ресурсов и её модификаций, учитывающих влияние факторов производства. Представлена методика проведения экономического анализа выпуска продукции, использования ресурсов и влияния факторов производства с помощью методов линейного программирования и теории двойственности, в частности. Методика основывается на представлении задачи использования ресурсов и её модификаций как задачи линейного программирования. На основе анализа решений задачи линейного программирования предлагается анализ оптимальных решений экономических задач по использованию ресурсов с учётом влияния факторов производства.*

***Ключевые слова:** задача об использовании ресурсов, задача линейного программирования, норма выпуска продукции, относительная норма выпуска продукции двух видов, относительный расход ресурсов в продукции данного вида, относительный расход ресурса в выпускаемой продукции, оценка ресурса в выпускаемой продукции, оценка использования ресурса в производстве, оценка влияния фактора на доход предприятия, экономический анализ выпуска продукции, использования ресурсов и влияния факторов.*

***Abstract.** The article presents the methodological support of the sponsors of the Novosibirsk State Agrarian University for the study of the problem on the use of resources and its modifications that take into account the influence of factors of production. The technique economic analysis output, use of resources and the influence of factors of production by using methods of linear programming and duality theory in particular. The technique is based on the use of resources and its modifications as linear programming tasks. Based on the analysis of solutions of linear programming is offered an analysis of the optimal solutions to economic challenges on resource use with the counts of influence of factors of production.*

***Keywords:** the challenge of the use of resources, the task of linear programming, Norma production, relative norm of output two types of relative resource consumption in the production of this species, relative resource consumption in output estimation in manufactured products, resource usage in manufacture, assessment of the impact of factors on the income of enterprises, economic analysis of production, resource utilization and influence factors.*

Рецензент: Бикеева Марина Викторовна, кандидат экономических наук, доцент кафедры статистики, эконометрики и информационных технологий в управлении Национального исследовательского Мордовского государственного университет им. Н.П. Огарёва

Введение

Анализ экономической деятельности предприятия является неотъемлемой частью при выработке путей эффективного развития предприятия. Экономический анализ как дисциплина даёт возможность оценки работы предприятия по выполнению бизнес-планов, оценки его имущественно-финансового состояния. Целью определения этих оценок является выявление неиспользованных резервов для повышения эффективности деятельности предприятий.

Экономический анализ рассматривает различные методы получения оценок. Одной из групп методов являются экономико-математические методы, базирующиеся на математических методах, которые можно применить при решении экономических задач. Много исследований посвящено

использованию математических методов при решении экономических задач. В качестве математических методов используются методы математического программирования (динамическое программирование, линейное программирование, транспортная задача), сетевого планирования, теория систем массового обслуживания, матричные игры, методы исследования операций, методы математического анализа и другие. Мы выделим из всего этого многообразия методы, которые применяются для задач линейного программирования, используют методику применения теории двойственности при анализе решения задач.

Автор и группа коллег провели исследования по использованию методов линейного программирования при решении экономических задач. Эти исследования проводились в работах [1-15]. В частности, в статье [1] формулируется задача линейного программирования для экономической задачи использования ресурсов в общем виде [1] с выделением двух групп ресурсов, в одной из которых запасы ресурсов фиксируются, а другой нет. В статье [2] решается задача использования ресурсов для предприятия, выпускающего два вида продукции и использующего два вида ресурса. В статьях [3,4] были сформулированы и подробно решены задачи об использовании двух ресурсов при выпуске двух видов продукции и влиянии двух факторов производства. В [3] были рассмотрены внутренние факторы: минимальная относительная норма выпуска продукции первого вида и минимальная норма производства продукции второго вида. В [4] рассматривались внешние факторы: относительный и абсолютный спрос. Частные случаи влияния внутренних факторов исследовались в статьях [5-12], а внешних факторов – в [13-14]. Все эти работы имели предварительный характер с точки зрения экономических исследований.

Обоснование использования теории двойственности для экономического анализа работы предприятия было рассмотрено в статье [15]. В работах [16-23] был проведён экономический анализ оптимальных планов выпуска продукции при различных внутренних и внешних условиях. Экономический анализ основывался на анализе, полученном в статьях [5-12].

В этой статье рассмотрим вопросы, связанные с использованием анализа решения пары двойственных задач линейного программирования для экономического анализа производства предприятия, использования им ресурсов и влияния факторов на показатель эффективности производства, а также самого производства продукции по видам.

1. Объекты и методы исследования

1.1. Объект и цель исследования

Целью данной работы является разработка методики использования математических методов для проведения экономического анализа производства. На основании этой методики предлагается проводить анализ использования ресурсов, влияние существенных факторов, выпуска продукции каждого вида. Этот анализ предлагается проводить с целью дальнейшей выработки управленческих решений и определения путей повышения выбранного показателя, который определяет эффективность производства.

Основным объектом исследования предлагается модифицированная задача об использовании ресурсов, учитывающая воздействие факторов производства, которые могут быть представлены в виде линейных ограничений.

Сформулируем задачу об использовании ресурсов в общем виде [15].

Рассматривается предприятие, на котором производится l видов продукции A_1, A_2, \dots, A_l . Для производства продукции предприятие использует m ресурсов R_1, R_2, \dots, R_m . Запасы ресурсов заданы и равны соответственно b_1, b_2, \dots, b_m . Заданы нормы затрат ресурсов по каждому виду продукции $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$, где a_{ij} – количество ресурса R_i – необходимое для производства единицы продукции A_j . Для каждого вида продукции, который выпускает предприятие определён показатель эффективности производства этого вида продукции c_j . Нужно определить такой план выпуска продукции, при котором суммарное значение показателя эффективности будет максимальным или минимальным в зависимости от показателя эффективности. Суммарное значение показателя эффективности будем считать показателем эффективности производства и повышение эффективности производства будем понимать, как увеличение значения этого показателя.

Модификация задачи об использовании ресурсов, учитывающая влияние факторов производства, дополнительно предполагает, что заданы условия влияния факторов производства. В качестве примера в работе [3] определены внутренние требования на ассортимент выпускаемой продукции и минимальная норма производства одного из видов. В [4] определены относительный и абсолютный спрос на виды продукции. В [24] рассматривался только абсолютный спрос на виды продукции. Все эти условия представлялись в виде линейных неравенств на выпускаемую продукцию.

Используя теорию двойственности в линейном программировании, для каждого неравенства и каждой переменной прямой задачи рассмотрим влияние их на показатель эффективности в оптимальном решении задачи.

1.2. Методология исследования

Построение математической модели экономической задачи и исследование экономической задачи предлагается осуществлять согласно методологии математического моделирования. Для этого экономическую задачу формализуют таким образом, чтобы по ней можно было составить математическую модель задачи, адекватно отображающую исходную задачу.

Для задачи об использовании ресурсов и влиянии факторов производства предложим следующую последовательность формализации исходной задачи.

1. Определяем производителя продукции.

2. Определяем виды продукции, которые выпускает производитель.
3. Определяем ресурсы, которые используются в производстве и выделяем из них те, расход которых может повлиять на показатель эффективности производства.
4. Определяем факторы производства, которые влияют на показатель эффективности производства.
5. Определяем «условия по умолчанию», которые явно не формулируются в задаче, но явно присутствуют среди условий выпуска продукции.
6. Определяем показатели эффективности производства каждого вида продукции.
7. Определяем общий показатель эффективности производства производителя.
8. Проверяем согласованность общего показателя эффективности производства и показателей производства по видам продукции.

На основе проведённой формализации строится математическая модель задачи. Здесь нужно пояснить не совсем корректное понимание математической модели экономического объекта и математической модели экономической задачи. Как таковой математической модели задачи нет. Есть математическая задача, сформулированная для математической модели экономического объекта, для которого формулируется экономическая задача. Именно в таком толковании будем понимать математическую модель экономической задачи. При этом цель математической задачи является формализацией цели экономической задачи.

Важно остановиться на вопросе согласования общего показателя эффективности производства и показателей видов продукции. В исходной формулировке экономической задачи они зачастую не согласуются. Поэтому при переходе от экономической задачи к математической задаче важно сформулировать математическую задачу и согласовать так показатели эффективности производства, чтобы сформулированная математическая задача имела смысл с экономической точки зрения и отвечала целям экономической задачи.

После формализации экономической задачи строится её математическая модель. Здесь тоже предлагается последовательность построения математической модели.

1. Определяются переменные задачи.
2. Формулируются математические условия использования ресурсов.
3. Формулируются математические условия влияния факторов производства.
4. Формулируются условия на переменные математической задачи.
5. Формулируется целевая функция задачи.
6. Определяются условия адекватности построенной математической модели исходной экономической задачи.

Хотелось бы обратить внимание на то, что при построении математической модели сам производитель продукции не фигурирует. Но это не означает, что он не является объектом исследования. Важно понимать, что математическая задача формулируется именно для производителя и выводы по решению математической задачи делаются также для него.

Для задачи использования ресурсов и влияния факторов производства в качестве переменных математической модели задачи удобно определить объёмы выпускаемой продукции каждого вида.

Ограничения на использование ресурсов формулируются на основе принципа: расход ресурса в производстве всей продукции не превосходит его запаса. Здесь тоже есть тонкости согласования. Принцип может не всегда соблюдаться. Тогда нужно прописывать другие условия использования ресурса, допускающие расход ресурса больший, чем его запас.

Для задачи линейного программирования необходимо влияние факторов производства представить в виде линейных условий, линейных неравенств или уравнений.

Условия на переменные задачи формулируются по «условиям по умолчанию» или условиям исходной задачи, которые формулируются именно для переменных задачи. Таким «условием по умолчанию» является условие, что количество продукции каждого вида, изготавливаемое производительным должно быть положительным (неотрицательным). Оно явно не прописывается в задаче, но реально должно выполняться, так как производство продукции исключает производство отрицательного количества продукции.

На основе согласования общего и частных показателей эффективности производства определяется целевая функция математической задачи. Если изначально согласования нет (общий показатель эффективности производства не выражается через частные показатели), то подбирается показатель эффективности, который выражается через частные показатели и имеет такое же поведение, что и общий показатель эффективности производства при изменении плана выпуска продукции. Если же такой показатель подобрать нельзя, то исходная задача считается некорректно сформулированной. Такая ситуация является объективно возможной. Не всегда специалисты (экономисты) могут сформулировать задачу, которую можно формализовать в математическую задачу. Это происходит тогда, когда в экономической задаче недостаточно исходной информации для конкретно сформулированной задачи или изначально ставится противоречивая задача.

Таким образом, целевая функция математической задачи формулируется на основе согласования общего и частных показателей эффективности производства. Если общий показатель эффективности производства изменяется, то обязательно прописываются условия, при которых рассматривается замещение новым показателем исходного показателя. И выводы по решению построенной математической задаче формируются при этих условиях.

1.3. Методы исследования

Таким образом, мы достаточно подробно рассмотрели методологию исследований, предлагаемых в работе. Рассмотрим методы решения построенных задач. Используемая методология математического моделирования подходит к более широкому классу задач, чем исследование экономических проблем с помощью линейного программирования. Но мы всё время обращали внимание на моменты, когда построенная математическая задача будет задачей линейного программирования. Поэтому методами исследования в статье будут методы линейного программирования, и объектом исследования будет задача линейного программирования, сокращённо ЗЛП.

1.4. Методика исследования

Задача использования ресурсов и влияния факторов производства является не просто одной задачей. Любая ЗЛП имеет двойственную задачу, решение которой тесно связано с решением самой задачей. Поэтому под ЗЛП понимают пару двойственных задач. Исключения не составляет и, рассматриваемая нами, задача. Поэтому мы в дальнейшем будем понимать под задачей использования ресурсов и влияния факторов производства пару двойственных задач. Для пары двойственных задач в линейном программировании разработаны методики анализа решения на основе теории двойственности.

2. Экспериментальная часть

2.1. Анализ использования ресурсов в прямой задаче

Как было сказано выше, в работе [15] для решения экономической задачи в качестве математической модели использовалась задача об использовании ресурсов. В ней представлялись ограничения по использованию ресурсов в виде линейных неравенств типа меньше-либо равно, которые формулировались на основе принципа использования ресурса: расход ресурса в производстве всей продукции не превосходит его запаса. Тогда полагая, что x_j – количество продукции вида j , которое производит предприятие, $j=1,2,\dots,n$, условие использования i -го ресурса определяется неравенством:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (i=1,2,\dots,m), \quad (1)$$

где a_{ij} – удельный расход i -го ресурса в производстве продукции вида j . При этом считается, что все коэффициенты a_{ij} положительные (больше либо равны нулю). Полученное неравенство определяет расход ресурса вида i .

Для каждого ресурса в [15] определяется дополнительная переменная, которую обозначают y_i , значение которой равно

$$y_i = b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n). \quad (2)$$

Экономический смысл этой переменной – остаток ресурса, использованного по плану $X(x_1; x_2; \dots; x_n)$, [15]. Тогда для плана выпуска продукции $X(x_1; x_2; \dots; x_n)$, условие, что

$$b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) > 0 \quad (y_i > 0), \quad (3)$$

означает, что ресурс i -го вида расходуется не полностью и его остаток равняется y_i . В случае, когда

$$b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) = 0 \quad (y_i = 0), \quad (4)$$

то при данном плане $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ресурс i -го вида расходуется полностью, без остатка. Если

$$b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) < 0 \quad (\mu < 0), \quad (5)$$

то при данном плане $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для ресурс i -го вида расходуется сверх возможностей предприятия, данный план является недопустимым в прямой задаче.

Таким образом, по значению μ делают следующие выводы относительно использования ресурсов для плана $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

1) если $\mu > 0$ (случай (3)), то ресурс расходуется не полностью, его остаток равняется μ , при данном плане ресурс является избыточным;

2) если $\mu = 0$ (случай (4)), то ресурс расходуется полностью, без остатка;

3) если $\mu < 0$ (случай (5)), то план $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ недопустимый при заданных условиях производства.

Отметим, что определение дополнительных переменных в прямой задаче соответствует случаю, когда показатель эффективности производства стремится к максимуму, и равен разнице правой и левой части ограничения. Если показатель эффективности производства стремится к минимуму, то дополнительные переменные для ограничений равны разнице левой и правой частей ограничения. Экономический смысл ограничения тогда тоже поменяется.

2.2. Анализ значений факторов производства в прямой задаче

Ограничения для факторов производства отличаются от ограничений по использованию ресурсов тем, что в ограничении могут быть коэффициенты a_{ij} разных знаков и оно может иметь тип больше либо равно или равенства.

Для влияния факторов производства предлагаются неравенства, которые представим ниже.

Сначала рассмотрим ограничения для относительных факторов, в которых выделим две части: левая часть – относительная и правая часть – абсолютная.

Первый вид ограничений:

$$(\alpha_{ij_1}x_{j_1} + \alpha_{ij_2}x_{j_2} + \dots + \alpha_{ij_p}x_{j_p}) - (\alpha_{ik_1}x_{k_1} + \alpha_{ik_2}x_{k_2} + \dots + \alpha_{ik_s}x_{k_s}) \leq \eta_{i-m}, \quad (6)$$

$i = m+1, m+2, \dots, m+l$,

где $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_p}$, и $A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_s}$ – две группы видов продукции на которые влияет относительный фактор $i-m$;

l – число факторов;

$\alpha_{ij_1}, \alpha_{ij_2}, \dots, \alpha_{ij_p}$, и $\alpha_{ik_1}, \alpha_{ik_2}, \dots, \alpha_{ik_s}$ – номинальные значения относительных норм видов продукции факторов $i-m$, которые полагаются положительными;

η_{i-m} – абсолютное номинальное значение относительного фактора $i-m$.

Второй вид ограничений:

$$(\alpha_{ij_1}x_{j_1} + \alpha_{ij_2}x_{j_2} + \dots + \alpha_{ij_p}x_{j_p}) - (\alpha_{ik_1}x_{k_1} + \alpha_{ik_2}x_{k_2} + \dots + \alpha_{ik_s}x_{k_s}) \geq \eta_{i-m}. \quad (7)$$

Третий вид ограничений:

$$(\alpha_{ij_1}x_{j_1} + \alpha_{ij_2}x_{j_2} + \dots + \alpha_{ij_p}x_{j_p}) - (\alpha_{ik_1}x_{k_1} + \alpha_{ik_2}x_{k_2} + \dots + \alpha_{ik_s}x_{k_s}) = \eta_{i-m}. \quad (8)$$

Теперь рассмотрим ограничения для абсолютных факторов, в которых правая часть номинальное значение фактора.

Первый вид таких ограничений:

$$x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_p} \leq \Pi_{i-m}, \quad (9)$$

$i = m+1, m+2, \dots, m+l,$

где $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_p}$ – группа видов продукции, на который влияет относительный фактор $i-m$,

l – число факторов;

Π_{i-m} – номинальное значение абсолютного фактора $i-m$.

Второй вид ограничений:

$$x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_p} \geq \Pi_{i-m}. \quad (10)$$

Третий вид ограничений:

$$x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_p} = \Pi_{i-m}. \quad (11)$$

Для всех ограничений, определяющих влияние факторов, номинальные значения будем предполагать и называть максимальными нормами, если тип ограничения « \leq », минимальными нормами, если тип ограничения « \geq », или просто нормой, если тип ограничения – равенство. В случае, когда понятно о каком номинальном значении идёт речь, то будем их называть просто нормами. Для всех ограничений (6)-(11) будем полагать для заданного плана $X=(x_1; x_2; \dots; x_n)$ значение левой части ограничения значением фактора при этом плане.

Для ограничений, определяющих влияний факторов также определим дополнительные переменные y_i с помощью выражения (2), разность правой и левой части ограничения, если цель задачи получить максимальное значение показателя эффективности производства. В случае минимизации этого показателя дополнительные переменные определяем, как разность левой и правой части ограничения

$$y_i = (\alpha_{ij_1} x_{j_1} + \alpha_{ij_2} x_{j_2} + \dots + \alpha_{ij_p} x_{j_p}) - (\alpha_{ik_1} x_{k_1} + \alpha_{ik_2} x_{k_2} + \dots + \alpha_{ik_s} x_{k_s}) - \Pi_{i-m}. \quad (12)$$

В любом случае значение y_i тоже имеет экономический смысл. Это отклонение значения фактора при заданном плане от его номинального значения (нормы). Выводы по значению y_i будут аналогичны выводам по использованию ресурсов, но со своими особенностями.

Если $y_i > 0$ или $y_i < 0$, то при плане $X=(x_1; x_2; \dots; x_n)$ продукция выпускается не по номинальному значению, а значение y_i – отклонение значения фактора от номинального значения (нормы). Для ограничений (6) и (9) значение $y_i > 0$ означает, что значение фактора производства меньше номинального значения на y_i и это допустимое значение фактора. Если же $y_i < 0$, то значение фактора не допустимо в данном производстве. Для ограничений (7) и (10) более тонкий смысл значения y_i . Значение $y_i > 0$ определяет недопустимость плана $X=(x_1; x_2; \dots; x_n)$. Значение $y_i < 0$ означает, что продукция выпускается меньше нормы на y_i , но так как y_i отрицательное, то вывод делают, что значение фактора больше его номинального значения на $|y_i|$.

Если же $y_i = 0$, то продукция выпускается по номинальному значению фактора. Для условий (8) и (11) это следует автоматически, иначе план будет недопустимым. Таким образом, в случае $y_i = 0$ делают вывод, что продукция по данному плану производится по номинальному значению (норме) фактора.

2.3. Анализ производства продукции в прямой задаче

По значениям переменных x_j естественным образом делаются выводы по выпуску видов продукции.

- 1) Если $x_j > 0$, то при плане производства $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ продукция A_j производится (выпускается);
- 2) если $x_j = 0$, то при плане производства $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ продукция A_j не производится (не выпускается);
- 3) если $x_j < 0$, то план производства $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ недопустимый.

2.4. Анализ использования ресурсов в двойственной задаче

Рассматриваем задачу использования ресурсов [15] с учётом влияния факторов, ограничения которых определялись условиями (6)-(11). Поменяем цель задачи. Будем продавать ресурсы по их оценочным показателям с условием, что ресурсы не выгодно использовать в производстве. Это условие касается каждого вида продукции, выпускаемого предприятием. Определим для каждого ресурса его оценку использования в производстве, а для фактора оценку влияния на показатель эффективности производства. Обозначим эти оценки переменными u_i , которые будем также называть оценками i -го ограничения или двойственными оценками ограничений. Их экономический смысл состоит в том, что они определяют увеличение показателя эффективности производства при увеличении запаса ресурса или номинального значения фактора на единицу. При стремлении прямой задачи к максимуму условия, накладываемые на оценки ограничений, по теории двойственности будут противоположны типам ограничений-неравенств, и без условий для ограничений-равенств.

Тогда для продукции A_j условие, что её не выгодно будет выпускать будет равносильно тому, что суммарная оценка использования ресурсов и влияния факторов для единицы продукции A_j будет больше либо равна показателю эффективности производства единицы продукции A_j . Считая, что a_{ij} – технологические коэффициенты использования ресурсов и влияния факторов на единицу продукции, для каждого вида A_j в новой, двойственной, задаче будет записываться условие невыгодности предприятию выпускать продукцию A_j :

$$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_m \geq q_j. \quad (13)$$

Анализ значений переменных, соответствующих ограничениям для ресурсов, в двойственной задаче системы оценок $U = (u_1; u_2; \dots; u_m)$ будет следующим.

- 1) Если $u_i > 0$, то в двойственной задаче по системе оценок $U = (u_1; u_2; \dots; u_m)$ ресурс R_i используется эффективно, является дефицитным по этому плану, увеличение запаса ресурса увеличивает показатель эффективности производства;
- 2) если $u_i = 0$, то по системе оценок в двойственной задаче $U = (u_1; u_2; \dots; u_m)$ изменение запаса ресурса не изменяет показатель эффективности производства;
- 3) если $u_i < 0$, то система оценок в двойственной задаче $U = (u_1; u_2; \dots; u_m)$ будет не допустимой.

2.5. Анализ влияния факторов в двойственной задаче

Перейдём к анализу влияния факторов производства в двойственной задаче. Рассмотрим анализ двойственных оценок влияния факторов для ограничений-неравенств типа « \leq ».

- 1) Если оценка влияния факторов по системе оценок $U = (u_1; u_2; \dots; u_m)$ больше нуля ($u_i > 0$), то увеличение номинального значения фактора увеличивает показатель эффективности производства, фактор влияет на показатель эффективности, величина влияния равна u_i на единицу номинального значения фактора;

2) если для фактора $u_i=0$, то по системе оценок в двойственной задаче $U=(u_1; u_2; \dots; u_m)$ изменение номинального значения фактора не изменяет показатель эффективности производства, фактор не влияет на него;

3) если $u_i < 0$, то система оценок в двойственной задаче $U=(u_1; u_2; \dots; u_m)$ будет не допустимой.

Рассмотрим анализ двойственных оценок влияния факторов для ограничений-неравенств типа « \geq ».

1) если $u_i > 0$, то система оценок в двойственной задаче $U=(u_1; u_2; \dots; u_m)$ будет не допустимой;

2) если для фактора $u_i=0$, то по системе оценок в двойственной задаче $U=(u_1; u_2; \dots; u_m)$ изменение номинального значения фактора не изменяет показатель эффективности производства, фактор не влияет на него;

3) если оценка влияния факторов по системе оценок $U=(u_1; u_2; \dots; u_m)$ больше нуля ($u_i < 0$), то уменьшение номинального значения фактора увеличивает показатель эффективности производства, фактор влияет на показатель эффективности, величина влияния равна $|u_i|$ на единицу номинального значения фактора.

Рассмотрим анализ двойственных оценок влияния факторов для ограничений-уравнений.

1) Если оценка влияния факторов по системе оценок $U=(u_1; u_2; \dots; u_m)$ не равна нулю ($u_i \neq 0$), то изменение номинального значения фактора изменяет показатель эффективности производства, фактор влияет на показатель эффективности, величина влияния равна u_i на единицу номинального значения фактора;

2) если для фактора $u_i=0$, то по системе оценок в двойственной задаче $U=(u_1; u_2; \dots; u_m)$ изменение номинального значения фактора не изменяет показатель эффективности производства, фактор не влияет на него.

2.6. Анализ производства продукции в двойственной задаче

Аналогично прямой задаче в двойственной задаче тоже определяются дополнительные переменные v_j . Если прямая задача имеет целью достижения максимума показателя эффективности производства, то в двойственной задаче целью будет достижение минимума целевой функции. Поэтому значения дополнительных переменных равна разнице левой и правой части:

$$v_j = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_m - c_j. \quad (14)$$

Экономический смысл дополнительных переменных v_j состоит в том, что их значения равны превышению суммарной оценки использования ресурсов и влияния факторов над показателем эффективности в единице продукции A_j . С некоторой степенью точности значение v_j это разность стоимости ресурсов с учётом влияния факторов в единице A_j продукции над стоимостью этой продукции.

Отметим, что в задаче об использовании ресурсов объёмы выпуска продукции по умолчанию положительные. Поэтому в допустимых планах v_j тоже положительные.

Рассмотрим оценку производства продукции по системе оценок $U=(u_1; u_2; \dots; u_m)$. Её также называют оценкой способа производства данного вида продукции.

Пусть по системе оценок $U=(u_1; u_2; \dots; u_m)$ выполняется условие

$$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_m < c_j. \quad (15)$$

Это означает, что есть другая система оценок, которая лучше оценивает использование ресурсов и влияние факторов при производстве продукции A_j .

Пусть теперь по системе оценок $U=(u_1; u_2; \dots; u_m)$ выполняется условие

$$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_m > c_j. \quad (16)$$

В этом случае система оценок является недопустимой в двойственной задаче. Осталось рассмотреть для системы оценок $U=(u_1; u_2; \dots; u_m)$ условие

$$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_m = c_j. \quad (17)$$

В этом случае система оценок определяет показатель эффективности производства продукции A_j . Это и есть условие целесообразности использования ресурсов в продукции A_j .

Таким образом по значениям дополнительных переменных η_j можно сделать следующие выводы:

- 1) если $\eta_j < 0$ (случай (15)), то система оценок является недопустимой в двойственной задаче;
- 2) если $\eta_j > 0$ (случай (16)), то по данной системе оценок ресурсов и факторов производства продукцию A_j выпускать не выгодно;
- 3) если $\eta_j = 0$ (случай (17)), то данная система оценок определяет показатель эффективности производства продукции A_j , по данной системе оценок ресурсы в производстве продукции A_j используются эффективно.

3. Результаты

3.1. Экономический анализ эффективности производства

Выводы, рассмотренные в п. 2.1.–2.6. для планов задачи, при оптимальных планах уже являются выводами по всей задаче в целом. Для оптимальных планов задачи линейного программирования справедливы следствия теоремы равновесия для пары двойственных задач. В [15] были рассмотрены эти следствия и их использование при анализе решений пары двойственных задач. С помощью этих следствий и проведём экономический анализ расширенного оптимального решения пары задач использования ресурсов.

Экономический анализ представим в виде трёх частей: анализ использования ресурсов, влияния факторов и производства продукции.

Отметим, что экономический анализ для задачи использования ресурсов с целью максимизации показателя эффективности производства рассматривается в предположении увеличения показателя эффективности производства.

3.2.1. Экономический анализ использования ресурсов

При экономическом анализе использования ресурсов проводится анализ ограничений, соответствующих расходу ресурсов, при оптимальном плане.

Сначала для ограничения определяется y_i^* . Возможны два случая: $y_i^* > 0$ или $y_i^* = 0$.

Если $y_i^* > 0$, то при оптимальном плане ресурс расходуется не полностью, его остаток составляет y_i^* . Ресурс избыточный. Расход ресурса не влияет на показатель эффективности производства.

Если $y_i^* = 0$, то при оптимальном плане ресурс расходуется полностью, без остатка. Смотрим u_i^* .

Если $u_i^* > 0$, то ресурс является дефицитным, его предельная оценка равняется u_i^* . При увеличении запаса ресурса показатель эффективности производства увеличивается. Увеличение составляет u_i^* при увеличении ресурса на единицу.

Если $u_i^* = 0$, то при увеличении запаса ресурса показатель эффективности производства не увеличивается. Изменение запаса ресурса не влияет на показатель эффективности производства.

3.2.2. Экономический анализ влияния факторов

Экономический анализ влияния факторов производства учитывает тип ограничения для фактора. Последовательность проведения анализа такая же, как и для анализа использования ресурсов.

Смотрим значение y_i^* . Оно может быть или не равно нулю, или равно нулю, $y_i^* \neq 0$ или $y_i^* = 0$.

Если $y_i^* \neq 0$, то в зависимости от ограничения делаем выводы. Если условие для фактора (15), то $y_i^* > 0$. Значение фактора меньше номинального на y_i^* , изменение номинального значения фактора не влияет на показатель эффективности производства. Если же выполняется условие (16), то $y_i^* < 0$, значение фактора больше номинального на $|y_i^*|$, изменение номинального значения фактора также не влияет на показатель эффективности производства.

Если $y_i^* = 0$, то продукция выпускается по номинальному значению фактора. Смотрим u_i^* .

Возможны также два случая: $u_i^* \neq 0$ и $u_i^* = 0$. Если $u_i^* \neq 0$, то опять смотрим на условия (15) и (16). Для условия (15) $u_i^* > 0$, оценка влияния фактора равна u_i^* , при увеличении номинальной нормы фактора на единицу показатель эффективности производства увеличивается на u_i^* единиц. Увеличение номинальной нормы фактора увеличивает показатель эффективности производства. Для условия (16) $u_i^* < 0$, оценка влияния фактора равна u_i^* , при уменьшении номинальной нормы фактора на единицу показатель эффективности производства увеличивается на $|u_i^*|$ единиц. Уменьшение номинальной нормы фактора увеличивает показатель эффективности производства. Для условия (17) возможны оба случая: и $u_i^* > 0$, и $u_i^* < 0$. Выводы такие же, как и для случаев (15 и (16).

Если $u_i^* = 0$, то изменение номинального значения фактора не влияет на показатель эффективности производства.

Если $u_i^* = 0$, то при увеличении запаса ресурса показатель эффективности производства не увеличивается. Изменение запаса ресурса не влияет на показатель эффективности производства.

3.2.3. Экономический анализ производства видов продукции

Экономический анализ производства видов продукции предполагает сначала анализ переменных x_j^* , а потом, в зависимости от значений x_j^* , анализ дополнительных переменных двойственной задачи v_j^* .

Смотрим x_j^* . Здесь также возможны два случая: $x_j^* > 0$ или $x_j^* = 0$.

Если $x_j^* > 0$, то при оптимальном плане продукция A_j выпускается в объёме x_j^* , продукцию A_j выпускать предприятию выгодно. В производстве продукцию A_j ресурсы расходуются эффективно.

Если $x_j^* = 0$, то при оптимальном плане продукция A_j не выпускается. Смотрим v_j^* .

Если $v_j^* > 0$, то ресурсы в производстве продукции A_j расходуются не эффективно, предприятию не выгодно выпускать продукцию A_j .

Если $v_j^* = 0$, то ресурсы в производстве продукции A_j расходуются эффективно. Возможно, есть оптимальный план, при котором продукция A_j выпускается.

Отметим, что вопрос о выгодности производства продукции определяется по переменным x_j^* , а о невыгодности производства по дополнительным переменным v_j^* .

3.2.4. Заключительная часть экономического анализа

Экономический анализ заканчивают выводы по значению показателя эффективности математической задачи: выписывается найденный оптимальный план и максимальное (минимальное значение показателя эффективности). В случае замены показателя эффективности при переходе от экономической задачи к математической делается вывод о плане, при котором достигается экстремального значение, и условия, при которых показатели эффективности ведут себя одинаково.

Вводы

Рассмотрена методика проведения экономического анализа с использованием теории двойственности в линейном программировании для модифицированной задачи использования ресурсов. Методика рассмотрена для показателя эффективности, целью которого является максимум.

Библиографический список

1. Мамонов О.В. Анализ использования двух ресурсов предприятия с двумя видами продукции с помощью графического способа решения задачи линейного программирования. // Агропродовольственная экономика. 2016. № 10. С. 4-42.
2. Мамонов О.В. Анализ эффективного использования двух ресурсов для предприятия, выпускающего два вида продукции. // Агропродовольственная экономика. 2016. № 12. С. 30-62.
3. Мамонов О.В., Бикеева М.В. Решение задачи об использовании двух ресурсов для предприятия, выпускающего два вида продукции, с учётом влияния минимальной относительной нормы производства одного вида продукции к другому и минимальной нормы выпуска продукции второго вида. // Агропродовольственная экономика. 2018. № 3. С. 22-42.
4. Мамонов О.В. Задача о рациональном использовании двух ресурсов для предприятия, выпускающего два вида продукции, с учётом влияния относительного и абсолютного спроса. // Экономические исследования и разработки. 2019. № 1. С. 19-34.
5. Меняйкин Д.В. Анализ решения задачи о влиянии минимальной относительной нормы одного вида продукции к другому виду и минимальной нормы второго вида в случае баланса влияния обоих факторов и использования обоих ресурсов и приоритета первого вида продукции. // Экономика и бизнес: теория и практика. 2018. № 8. С. 83-87.
6. Конюхова А.В., Мамонов О.В. Анализ решения задачи о влиянии минимальной относительной нормы одного вида продукции к другому виду продукции, минимальной нормы второго вида продукции в случае баланса влияния обоих факторов, использования обоих ресурсов при приоритете выпуска второго вида продукции. / Актуальные направления развития аграрной науки в работах молодых учёных: сборник научных статей молодых ученых, посвященный 190-летию опытного дела в Сибири, 100-летию сельскохозяйственной науки в Омском Прииртышье и 85-летию образования Сибирского НИИ сельского хозяйства. 2018. С. 194-198.
7. Ерназарова С.А. Анализ решения задачи о влиянии разных видов минимальных норм выпуска продукции в условиях отсутствия приоритета какого-нибудь вида продукции. // Молодой ученый. 2018. № 34 (220). С. 40-44.
8. Луцик Р.В. Анализ решения задачи о влиянии разных видов минимальных норм выпуска продукции в условиях, когда показатели эффективности производства пропорциональны расходу одного из ресурсов. // Молодой ученый. 2018. № 34 (220). С. 47-50.
9. Осипов И.В. Анализ влияния минимальной нормы продукции в случае баланса использования двух ресурсов с приоритетом выпуска продукции первого вида. / В сборнике: Новая наука: новые

Мамонов О.В. Использование теории двойственности в экономическом анализе эффективного использования ресурсов/ Экономические исследования и разработки. - №6, 2019 г.
Доступ: <http://edrf.ru/article/04-06-19>

вызовы Сборник научных трудов I Международной научно-практической конференции. 2018. С. 32-36.

10. Крючкова И.В. Анализ влияния минимальной относительной нормы продукции в случае баланса использования обоих ресурсов с приоритетом выпуска второго вида продукции. / Молодой ученый. 2018. № 35 (221). С. 36-38.

11. Шишина Л.Г. Анализ влияния норм продукции при безприоритетом выпуске продукции. / В сборнике: Актуальные проблемы агропромышленного комплекса Сборник трудов научно-практической конференции преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов Новосибирского ГАУ. 2018. С. 324-329.

12. Багрова К.О., Шишина Л.Г. Анализ влияния норм продукции, когда показатели эффективности производства пропорциональны расходу одного из ресурсов. / В сборнике: Актуальные проблемы агропромышленного комплекса Сборник трудов научно-практической конференции преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов Новосибирского ГАУ. 2018. С. 22-27.

13. Мамонов О.В., Луцки Р.В. Оптимальные планы производства продукции двух видов с использованием двух ресурсов в условиях ограничения выпуска по двум нормам. // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2019. № 2-2. С. 92-96.

14. Меняйкин Д.В. Условия, при которых предприятию, выпускающего два вида продукции, выгодно выпускать только один вид. // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2019. № 2-2. С. 100-102.

15. Мамонов О.В. Использование методов линейного программирования при анализе производства продукции. / В сборнике: Актуальные проблемы агропромышленного комплекса сборник трудов научно-практической конференции преподавателей, студентов, магистрантов и аспирантов, посвященный 80-летию Новосибирского ГАУ. Новосибирский государственный аграрный университет. 2016. С. 194-198.

16. Меняйкин Д.В. Экономический анализ задачи о влиянии минимальной относительной нормы и минимальной нормы в случаях баланса влияния обеих норм и использования двух ресурсов и приоритета выпуска первого вида продукции. // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2018. № 9. С. 171-174.

17. Мамонов О.В., Конюхова А.В. Экономический анализ о влиянии минимальной относительной нормы и минимальной нормы в случае баланса влияния обоих факторов и использования двух ресурсов и приоритета выпуска второго вида продукции. / В сборнике: Актуальные проблемы агропромышленного комплекса Сборник трудов научно-практической конференции преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов Новосибирского ГАУ. 2018. С. 205-208.

18. Андронов А.Ю., Ерназарова С.А. Пример экономического анализа производства без приоритета. / В сборнике: Актуальные проблемы агропромышленного комплекса Сборник трудов научно-практической конференции преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов Новосибирского ГАУ. 2018. С. 16-19.

19. Михальчишина Ю.А., Луцки Р.В. Экономический анализ минимальных норм выпуска продукции в условиях, когда показатели эффективности производства пропорциональны расходу одного из ресурсов. / В сборнике: Актуальные проблемы агропромышленного комплекса Сборник

Мамонов О.В. Использование теории двойственности в экономическом анализе эффективного использования ресурсов/ Экономические исследования и разработки. - №6, 2019 г.
Доступ: <http://edrf.ru/article/04-06-19>

трудов научно-практической конференции преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов Новосибирского ГАУ. 2018. С. 228-232.

20. Грунина М.В. Экономический анализ влияния нормы выпуска второго вида продукции в условиях предпочтения выпуска первого вида. / В сборнике: Роль аграрной науки в устойчивом развитии сельских территорий Сборник III Всероссийской (национальной) научной конференции. 2018. С. 1036-1040.

21. Шишина Л.Г. Экономический анализ влияния относительной нормы выпуска первого вида продукции ко второму виду в условиях предпочтения второго вида продукции. / В сборнике: Роль аграрной науки в устойчивом развитии сельских территорий Сборник III Всероссийской (национальной) научной конференции. 2018. С. 1222-1226.

22. Шишина Л.Г. Экономический анализ влияния норм выпуска продукции в условиях отсутствия предпочтения. / В сборнике: Теория и практика современной аграрной науки Сборник II Национальной (всероссийской) конференции. 2019. С. 578-581.

23. Меняйкин Д.В. Экономический анализ влияния относительного спроса в случае приоритета выпуска одного из видов продукции. / Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2019. № 4-2. С. 205-210.

24. Мамонов О.В. Анализ влияния спроса продукции и запаса ресурса на показатель эффективности производства, выпускающего два вида продукции. / Агропродовольственная экономика. 2018. № 2. С. 20-33.

25. Мамонов О.В. Анализ влияния спроса продукции и запаса ресурса на показатель эффективности производства, выпускающего два вида продукции // Агропродовольственная экономика. 2018. № 2. С 20-32.