МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

УДК 330.4; 338.12

Мамонова М.О., Михальчишина Ю.А., Беляева Е.В., Гаврюк С. А. Особые рыночные условия производства двух видов продукции. Часть 1

Special market conditions for the production of two types of products. Part 1

Мамонова М.О., Михальчишина Ю.А., Беляева Е.В., Гаврюк С. А.
1. ученица гимназии № 11 "Гармония"
Новосибирск, Россия
2. к. ф.-м. н., доцент кафедры информационных технологий и моделирования ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ
Новосибирск, Россия
3. аспирант, ассистент кафедры управления и отраслевой экономики, ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ
Новосибирск, Россия
4. студентка, факультет экономики и управления, ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ
Новосибирск, Россия
Mamonova M.O., Mikhalchishina Yu.A., Belyaeva E.V., Gavryuk S.A.
1. student of gymnasium No. 11 "Harmony"
Novosibirsk, Russia
2. Ph.D. Sc., Associate Professor, Department of Information Technologies and Modeling, Novosibirsk State Agrarian University
Novosibirsk, Russia
3. postgraduate student, assistant at the Department of Management and Industrial Economics, FSBEI HE Novosibirsk State Agrarian University
Novosibirsk, Russia
4. student, Faculty of Economics and Management, FSBEI HE Novosibirsk State Agrarian University
Novosibirsk, Russia

Аннотация. *В статье рассматривается задача об оптимальном использовании двух ресурсов при выпуске трёх видов продукции. Проводится анализ планов в особых условиях, когда расход ресурсов пропорционален показателям эффективности производства производимой продукции. Для поиска оптимальных планов используется теория двойственности в линейном программировании.*

Ключевые слова: *задача об оптимальном использовании ресурсов, задача линейного программирования, двойственная задача, теорема равновесия, особые рыночные условия*

Abstract. *The article discusses the problem of optimal use of two resources in the production of three types of products. The analysis of plans is carried out in special conditions, when the consumption of resources is proportional to the indicators of the efficiency of production of products. To find optimal plans, the theory of duality in linear programming is used.*

Keywords: *The Optimal Use of Resources Challenge, Linear Programming Problem, The Dual Challenge, Equilibrium theorem, Special Market Conditions*

Рецензент: Бюллер Елена Александровна – кандидат экономических наук, доцент. ФГБОУ ВО «Адыгеский государственный университет»

Введение

Для анализа производства продукции могут быть использованы методы линейного программирования, в частности, задача об оптимальном использовании ресурсов (ЗОИР). Такой анализ предлагается в статье [1], в которой ЗОИР представляется в виде пары двойственных задач линейного программирования. Пример задачи для одного ресурса рассматривался в статье [3], в которой анализ проводился на основе приоритета выпуска одного из видов продукции. Для двух видов продукции анализ оптимальных планов с помощью ЗОИР проведён в статье [3], а в статье [4] результаты анализа были представлены в виде таблицы. Анализ выпуска двух видов продукции при использовании трёх видов продукции рассматривался в статьях [5-10]. Статья [5], в которой рассматривался особый случай отношения показателей эффективности, является одной из составных частей исследования, которое продолжается в этой статье. В статьях [6-7] рассматривались условия полного расхода в оптимальном плане всех трёх ресурсов. В статьях [8-9] исследовалось производство двух видов продукции в условиях наличия приоритета выпуска одного из видов продукции. В статье [10] рассматривался пример поиска зависимости оптимальных планов задачи ЗОИР от запасов двух ресурсов при фиксированном запасе третьего ресурса.

1. Постановка задачи

Целью данной работы является исследование оптимальных планов ЗОИР в особых рыночных условиях, когда отношение показателей эффективности двух видов продукции равняется отношению удельных расходов одного из ресурсов этих видов. Один из трёх случаев исследовался в статье [5].Сформулируем ЗОИР, как и в статье [5], а также в работах [6-10].

Предприятие производит два вида продукции A_1 иA_2, используя три ресурса R_1, R_2 и R_3. На единицу продукции A_1 требуется a_{11} ед. ресурса R_1, a_{21} ед. ресурса R_2 и a_{31} ед. ресурса R_3, на единицу продукции A_2 требуется a_{12} ед. ресурса R_1, a_{22} ед. ресурса R_2 и a_{32} ед. ресурса R_3. Значение показателя эффективности единицы продукции A_1 составляет c_1 руб., единицы продукции A_2 – c_2 руб. Необходимо составить такой план выпуска продукции A_1 иA_2, чтобы при запасе ресурса R_1 в количестве b_1 ед., ресурса R_2 в количестве b_2 ед., ед., ресурса R_3 в количестве b_3 ед. показатель эффективности производства был для предприятия максимальным.

Математическая модель использования ресурсов представляется в виде пары двойственных задач [5-10]: прямой

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \leq & b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & \leq & b_3 \end{cases} \quad . \qquad (1.1)$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$
$$Z = c_1x_1 \quad +c_2x_2 \quad \rightarrow \quad max$$

и двойственной

$$\begin{cases} a_{11}u_1 & +a_{21}u_2 & +a_{31}u_3 & \geq & c_1 \\ a_{12}u_1 & +a_{22}u_2 & +a_{32}u_3 & \geq & c_2 \end{cases} \qquad (1.2)$$
$$u_1 \geq 0 \quad u_2 \geq 0 \quad u_3 \geq 0$$
$$W = b_1u_1 \quad +b_2u_2 \quad +b_3u_3 \quad \rightarrow \quad min$$

где: x_1 – количество продукции A_1, x_2 – количество продукции A_2, Z – показатель эффективности использования ресурсов предприятия, u_1 – оценка использования в производстве ресурса R_1, u_2 – оценка использования ресурса R_2, u_3 – оценка использования ресурса R_3, W – суммарная оценка используемых в производстве ресурсов предприятия.

Так же, как и в статьях [5-10], определим вспомогательные коэффициенты.

Первая группа коэффициентов.

1) отношение затрат ресурса R_i в производстве единицы продукции A_2 и единицы продукции A_1:

$$k_i = \frac{a_{i2}}{a_{i1}}, \qquad (1.3)$$

где i=1, 2, 3. Показатель k_i можно рассматривать как индекс потребления ресурса R_i в производстве единицы продукции A_2 по отношению к единице продукции A_1.

2) отношение показателя эффективности производства продукции A_2 к показателю эффективности производства продукции A_1

$$k = \frac{c_2}{c_1}. \qquad (1.4)$$

В статье [5] этот показатель определили как индекс эффективности производства продукции A_2.

Полагаем, что:

$$k_1 < k_2 < k_3. \qquad (1.5)$$

и

$$a_{11} \neq 0, a_{12} \neq 0,\ a_{21} \neq 0,\ a_{22} \neq 0, a_{31} \neq 0, a_{32} \neq 0. \qquad (1.6)$$

Производство в особых рыночных условиях производства продукции означает, что отношение показателя эффективности производства продукции A_2 к показателю эффективности производства продукции A_1 равно отношению затрат одного из трёх ресурсов в производстве единицы продукции A_2 и единицы продукции A_1:

$$k = k_1, \text{ или } k = k_2, \text{ или } k = k_3. \quad (1.10)$$

При таких условиях есть случаи, когда оптимальный план в прямой задаче будет неединственным. В данной работе будет рассмотрен особый случай, когда отношение показателя эффективности производства продукции A_2 к показателю эффективности производства продукции A_1 равно отношению затрат ресурса R_1 в производстве единицы продукции A_2 и единицы продукции A_1:

$$k = k_1. \qquad (1.11)$$

Равенство отношения показателей эффективности производства продукции A_2 к показателю эффективности производства продукции A_1 отношению удельных затрат ресурса R_2 будет рассмотрен в части 2, а равенство отношения показателей эффективности отношению затрат ресурса R_3 был рассмотрены в части 3, [5].

2. Методика и методология исследования

Как и в статьях [5-10], также рассмотрим другие группы вспомогательных коэффициентов.

Вторая группа. Отношение удельных затрат ресурсов R_m и R_i в производстве единицы продукции A_j обозначим

$$\beta_{im}^{(j)} = \frac{a_{im}}{a_{ij}}, \qquad (2.1)$$

где i=1, 2, 3; j=1, 2; m =1, 2, 3, $i \neq m$. Этот показатель можно рассматривать как относительный коэффициент расхода ресурса R_m в производстве продукции A_j к расходу ресурса R_i, [5]. Отношение запасов ресурсов R_m и R_i обозначим [5]:

$$\beta_{im} = \frac{b_m}{b_i}, \qquad (2.2)$$

где i=1, 2; m=2, 3, $i \neq m$.

Третья группа. Максимальное количество продукции A_j, которое можно получить при полном расходе ресурса R_i обозначим, [5]:

$$n_{ij} = \frac{b_i}{a_{ij}}, \qquad (2.4)$$

где i=1, 2; j=1, 2, 3. Максимальный объём продукции A_j, который можно произвести, используя все ресурсы в количестве их запасов, обозначим n_j:

$$n_j = \min_{1 \le i \le 3} n_{ij}. (2.5)$$

Четвёртая группа. Максимальную оценку ресурса R_i в производстве единицы продукции A_j обозначим, [5]:

$$p_{ij} = \frac{c_j}{a_{ij}}, \qquad (2.6)$$

где i=1, 2; j=1, 2, 3.

3. Результаты

Предполагаем, что выполняются условия (1.5) и показатель k равен значению k_1. Рассмотрим возможные значения показателя n_1. Для него есть 7 вариантов значений: 1) $n_1=n_{11}$; 2) $n_1=n_{12}$; 3) $n_1=n_{13}$; 4) $n_1=n_{11}=n_{12}$; 5) $n_1=n_{11}=n_{13}$; 6) $n_1=n_{12}=n_{13}$; 7) $n_1=n_{11}=n_{12}=n_{13}$.

Сначала рассмотрим случаи, когда $n_1=n_{31}$. Это варианты 3, 5, 6 и 7.В этих вариантах расход ресурса R_3 будет ограничивать производство продукции A_1, как один, так и совместно с ресурсами R_1, R_2 или обоими ресурсами R_1 и R_2. Далее рассмотрим случаи, когда $n_1=n_{21}$. Это варианты 2, 4, 6, в которых ограничивать производство продукции A_1 будет расход ресурса R_2, как один, так и совместно с ресурсом R_1. В завершении рассмотри случаи, когда $n_1=n_{11}$, вариант 1, в которых ограничивать производство продукции A_1 будет расход только ресурса R_1.

3.1. Значение n_1 равно n_{31}

Отметим, что согласно [8, с.33-41] случаи 3, 5, 6 и 7 удовлетворяют условиям предпочтения выпуска продукции A_1.

Оптимальным планом прямой задачи в вариантах 3, 5, 6 и 7 будет план:

$$x_1^* = n_1 = n_{31}. \qquad (3.1.1)$$

$$x_2^* = 0, \qquad (3.1.2)$$

$$Z_{max} = c_1 \cdot n_1 = c_1 \cdot n_{31} = b_1 \cdot p_{31}, \qquad (3.1.3)$$

в котором оптимальный остаток ресурса R_3 равен

$$y_3^* = 0. \qquad (3.1.4)$$

Значения y_1^*и y_2^*в вариантах3, 5, 6 и 7 имеют разные значения.

3.1.1. Значение n_1 равно только отношению n_{31}.

Найдём оптимальные остатки ресурсов и решение двойственной задачи для варианта 3. Его поиск был рассмотрен в [8,с.36].

Для 3 варианта выполняются отношения: $n_1=n_{31}$, $n_{11}>n_{31}$, $n_{21}>n_{31}$.Тогда:

$$y_1^* = b_1 - a_{11} \cdot n_{31} = a_{11} \cdot (n_{11} - n_{31}) > 0, \qquad (3.1.1.1)$$

$$y_2^* = b_2 - a_{21} \cdot n_{31} = a_{21} \cdot (n_{21} - n_{31}) > 0. \qquad (3.1.1.2)$$

Оптимальный план прямой задачи

$$X^* = (n_{31}; 0), \qquad (3.1.1.3)$$

$$Y^* = (b_1 - a_{11} \cdot n_{31}; b_2 - a_{21} \cdot n_{31}; 0), \qquad (3.1.1.4)$$

$$Z_{max} = c_1 \cdot n_{31}. \qquad (3.1.1.5)$$

Переходим к поиску оптимального плана в двойственной задаче. Так как y_1^* и y_2^* строго больше нуля, то

$$u_1^* = 0, \qquad (3.1.1.6)$$

$$u_2^* = 0. \qquad (3.1.1.7)$$

Так как x_1^* строго больше нуля, а значение x_2^* равно нулю, то

$$v_1^* = 0, \qquad (3.1.1.8)$$

$$v_2^* \geq 0. \qquad (3.1.1.9)$$

Оптимальный план удовлетворяет условиям

$$a_{11}u_1^* + a_{21}u_2^* + a_{31}u_3^* = c_1, \qquad (3.1.1.10)$$

$$a_{12}u_1^* + a_{22}u_2^* + a_{33}u_3^* \geq c_1 k_1. \qquad (3.1.1.11)$$

Так как u_1^* и u_2^* равны нулю, то

$$u_3^* = p_{31}, \qquad (3.1.1.12)$$

$$v_2^* = c_1 \cdot (k_3 - k_1) > 0. \qquad (3.1.1.13)$$

Оптимальный план двойственной задачи

$$U^* = (0; 0; p_{31}), \qquad (3.1.1.14)$$

$$V^* = \big(0; c_1 \cdot (k_3 - k_1)\big), \qquad (3.1.1.15)$$

$$W_{min} = b_3 \cdot p_{31}. \qquad (3.1.1.16)$$

В обеих задачах оптимальные планы единственные.

3.1.2. Значение n_1 равно отношениям n_{11} и n_{31}.

Рассматриваем вариант 5. Для него выполняются отношения: $n_1 = n_{11} = n_{31}$, $n_{21} > n_{31}$. Поиск оптимальных планов рассмотрен в [8,с.37-38]. Оптимальный план и максимальное значение целевой функции по сравнению с вариантом 3 не изменятся (3.1.13-3.1.16), значение y_3^* так же равно нулю, (3.1.16), значение y_2^* вычисляется по формуле (3.1.1.2), а y_1^* станет равным нулю:

$$y_1^* = 0, \qquad (3.1.2.1)$$

$$Y^* = (0; b_2 - a_{21} \cdot n_{31}; 0), \qquad (3.1.2.2)$$

В двойственной задаче u_2^* останется равным нулю (3.1.1.7). Так же, как и в 3.1, v_1^* и v_2^* удовлетворяют условиям (3.1.1.8) и (3.1.2.9), оптимальный план двойственной задачи удовлетворяет условиям (3.1.1.10) и (3.1.1.11). Значения u_1^* и u_3^* будем искать в виде

$$u_1^* = \frac{c_1}{a_{21}} \cdot t_1, \quad (3.1.2.3)$$

$$u_3^* = \frac{c_1}{a_{31}} \cdot t_3, \quad (3.1.2.4)$$

где значения параметров t_1 и t_3 положительные, т.е. больше либо равные нулю. Подставляем u_1^* и u_3^* в условия (3.1.1.10) и (3.1.1.11) и преобразуем их. Получим

$$t_1 + t_3 = 1, \quad (3.1.2.5)$$

$$k_1 \cdot t_1 + k_3 \cdot t_3 \geq k_1. \qquad (3.1.2.6)$$

Неравенство (3.1.2.6) выполняется при условии (1.5) и соотношении (3.1.2.5). Для параметров t_1 и t_3 интервалы изменения их значений, [11, с. 817-818]:

$$0 \leq t_1 \leq 1, \quad (3.1.2.7)$$

$$0 \le t_3 \le 1. \quad (3.1.2.8)$$

Значение v_1^* равно нулю (3.1.1.8), а v_2^* вычисляется по формуле:

$$v_2^* = c_1 \cdot (k_1 t_1 + k_3 t_3 - k_1) \ge 0, \quad (3.1.2.9)$$

где t_1 и t_3 удовлетворяют условию (3.1.2.6). Отметим, что v_2^* обращается в ноль при t_1=1 и t_3=0.

Оптимальный план двойственной задачи:

$$U^* = (p_{11} \cdot t_1; 0; p_{31} \cdot t_3), \qquad (3.1.2.10)$$

$$V^* = \big(0; c_1 \cdot (k_1 t_1 + k_3 t_3 - k_1)\big), \qquad (3.1.2.11)$$

$$W_{min} = b_1 \cdot p_{11} = b_3 \cdot p_{31}, \quad (3.1.2.12)$$

где t_1 и t_3 удовлетворяют условию (3.1.2.5).

В прямой задаче оптимальный план единственный, а в двойственной нет. Из (3.1.2.3), (3.1.2.4) и (3.1.2.7), (3.1.2.8) предельные полезности ресурсов R_2 и R_3 изменяются в пределах:

$$0 \le u_1^* \le p_{21}, \qquad (3.1.2.13)$$

$$0 \le u_3^* \le p_{31}, \qquad (3.1.2.14)$$

Среди оптимальных планов есть план, при котором v_2^* равняется нулю, а именно:

$$U^* = (p_{11}; 0; 0), \qquad (3.1.2.15)$$

3.1.3. Значение n_1 равно отношениям n_{21} и n_{31}.

Переходим к варианту 6, рассмотренному в [8, с. 38-40]. Для него выполняются отношения: n_1=n_{21}=n_{31}, n_{11}>n_{31}. Так же соотношениями (3.1.13-3.1.16) определяется оптимальный план и максимальное значение целевой функции, значение y_1^* вычисляется по формуле (3.1.1.1), y_2^* станет равным нулю

$$y_2^* = 0, \qquad (3.1.3.1)$$

y_3^*останется равным нулю. Оптимальные остатки равны:

$$Y^* = (b_1 - a_{11} \cdot n_{31}; 0; 0). \qquad (3.1.3.2)$$

В двойственной задаче u_1^* останется равным нулю, (3.1.1.6), v_1^* и v_2^* удовлетворяют условиям (3.1.1.8) и (3.1.3.9), оптимальный план двойственной задачи – условиям (3.1.1.10) и (3.1.1.11). Значения u_2^* и u_3^* будем искать в виде

$$u_2^* = \frac{c_1}{a_{21}} \cdot t_2, \quad (3.1.3.3)$$

$$u_3^* = \frac{c_1}{a_{31}} \cdot t_3, \quad (3.1.3.4)$$

где значения параметров t_1 и t_3 положительные. Значения u_2^* и u_3^* подставляем в условия (3.1.1.10) и (3.1.1.11):

$$t_2 + t_3 = 1, \quad (3.1.3.5)$$

$$k_2 \cdot t_2 + k_3 \cdot t_3 \ge k_1. \qquad (3.1.3.6)$$

Тогда неравенство (3.1.3.6) опять выполняется автоматически, параметры t_2 и t_3 изменяются от 0 до 1, включительно, [11, с. 817-818], (3.1.2.14) и

$$0 \le t_2 \le 1. \quad (3.1.3.7)$$

Значение v_1^* равно нулю (3.1.1.8),v_2^* вычисляется по формуле:

$$v_2^* = c_1 \cdot (k_2 t_2 + k_3 t_3 - k_1) > 0, \quad (3.1.3.8)$$

где t_2 и t_3 удовлетворяют условию (3.1.3.5).

Расширенный оптимальный план двойственной задачи:

$$U^* = (0; p_{21} \cdot t_2; p_{31} \cdot t_3), \qquad (3.1.3.9)$$

$$V^* = \big(0; c_1 \cdot (k_2 t_2 + k_3 t_3 - k_1)\big), \qquad (3.1.3.10)$$

$$W_{min} = b_2 \cdot p_{21} = b_3 \cdot p_{31}, \quad (3.1.3.11)$$

где t_2 и t_3 удовлетворяют условию (3.1.3.5).

В прямой задаче оптимальный план единственный, а в двойственной нет. Из (3.1.3.3) , (3.1.3.4) и (3.1.3.8), (3.1.3.9) предельная полезность ресурса R_2 изменяется в пределах:

$$0 \le u_2^* \le p_{21}, \qquad (3.1.3.12)$$

а R_3 изменяются в пределах (3.1.2.14).

3.1.4. Значение n_1 равно отношениям n_{11}, n_{21} и n_{31}.

Осталось рассмотреть вариант 7. Он рассмотрен в [8, с.40-41]. Для него n_1=n_{11}=n_{21}=n_{31}. Расширенный оптимальный план прямой задачи так же определяется соотношениями (3.1.13-3.1.16), в которых y_1^* тоже станет равным нулю, (3.1.2.1), y_2^*и y_2^* останутся равными нулю, (3.1.3.1) и (3.1.6).

В двойственной задаче v_1^* и v_2^* удовлетворяют условиям (3.1.1.8) и (3.1.3.9), оптимальный план двойственной задачи – условиям (3.1.1.10) и (3.1.1.11). Значение u_1^* будем искать в виде

$$u_1^* = \frac{c_1}{a_{11}} \cdot t_1. \quad (3.1.4.1)$$

u_2^* и u_3^* будем искать в виде (3.1.3.3) и (3.1.3.4). Значения u_1^*, u_2^* и u_3^* подставляем в условия (3.1.1.10) и (3.1.1.11):

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1, \qquad (3.1.4.2)$$

$$k_1 \cdot t_1 + k_2 \cdot t_2 + k_3 \cdot t_3 \ge k_1. \qquad (3.1.4.3)$$

Неравенство (3.1.4.3) выполняется автоматически, параметры t_1,t_2 и t_3 изменяются от 0 до 1 включительно, [11, с. 819-820], (3.1.2.7), (3.1.2.8) и (3.1.3.7). Значение v_1^* равно нулю (3.1.1.8), v_2^* вычисляется по формуле:

$$v_2^* = c_1 \cdot (k_1 t_1 + k_2 t_2 + k_3 t_3 - k_1) > 0, \quad (3.1.4.4)$$

где t_1,t_2 и t_3 удовлетворяют условию (3.1.4.2).

Расширенный оптимальный план двойственной задачи:

$$U^* = (p_{11} \cdot t_1; p_{21} \cdot t_2; p_{31} \cdot t_3), \qquad (3.1.4.5)$$

$$V^* = \big(0; c_1 \cdot (k_1 t_1 + k_2 t_2 + k_3 t_3 - k_1)\big), \qquad (3.1.4.6)$$

$$W_{min} = b_1 \cdot p_{11} = b_2 \cdot p_{21} = b_3 \cdot p_{31}, \qquad (3.1.4.7)$$

где t_1, t_2 и t_3 удовлетворяют условию (3.1.4.2).

Как и в п. 3.1.2 и 3.1.3, оптимальный план в прямой задаче единственный, а в двойственной задаче нет. Из (3.1.4.1), (3.1.3.3), (3.1.3.4) и (3.1.2.7), (3.1.3.7), (3.1.2.8) предельная полезность ресурса R_1 изменяется в пределах (3.1.3.13), предельная полезность ресурса R_2– в пределах (3.1.3.12), а предельная полезность ресурса R_3 – в пределах (3.1.2.14).

Среди оптимальных планов есть план, при котором v_2^* равняется нулю, а именно (3.2.1.15).

3.2. Значение n_1 равно n_{21}

Теперь рассмотрим случаи, когда n_1=n_{21}, но n_1≠n_{31}. Это варианты 2 и 4, удовлетворяющие условиям предпочтения выпуска продукции A_1, и полностью описанные в [8, с.41-45].

Оптимальным планом прямой задачи в них будет план:

$$x_1^* = n_1 = n_{21}, \qquad (3.2.1)$$

Объём x_2^* равен нулю (3.1.2),

$$Z_{max} = c_1 \cdot n_1 = c_1 \cdot n_{21} = b_2 \cdot p_{21}, \qquad (3.2.3)$$

оптимальный остаток ресурса R_2 равен нулю

$$y_2^* = 0, \qquad (3.2.4)$$

значения y_1^* и y_3^* в вариантах 2 и 4 различны.

3.2.1. Значение n_1 равно только отношению n_{21}.

Для варианта 2 выполняются отношения: n_1=n_{21}, n_{11}>n_{21}, n_{31}>n_{21}. Тогда оптимальные остатки ресурсов и решение двойственной задачи определяются выражениями:

$$y_1^* = b_1 - a_{11} \cdot n_{21} = a_{11} \cdot (n_{11} - n_{21}) > 0, \qquad (3.2.1.1)$$

$$y_3^* = b_3 - a_{31} \cdot n_{21} = a_{31} \cdot (n_{31} - n_{21}) > 0, \qquad (3.2.1.2)$$

$$X^* = (n_1 = n_{21}; 0), \qquad (3.2.1.3)$$

$$Y^* = (b_1 - a_{11} \cdot n_{21}; 0; b_3 - a_{31} \cdot n_{21}), \qquad (3.2.1.4)$$

$$Z_{max} = c_1 \cdot n_{21}. \qquad (3.2.1.5)$$

Переходим к поиску оптимального плана в двойственной задаче. Так как y_1^* и y_3^* строго больше нуля, то значения u_1^* и u_3^* равны нулю (3.1.1.6).

Так как x_1^* строго больше нуля, а значение x_2^* равно нулю, то v_1^* равно нулю (3.1.1.8), а v_2^* больше либо равно нулю, (3.1.1.9). Оптимальный план удовлетворяет условиям (3.1.1.10) и (3.1.1.11). Так как u_1^* и u_3^*равны нулю, то

$$u_2^* = p_{21}, \qquad (3.2.1.7)$$

$$v_2^* = c_1 \cdot (k_2 - k_1) > 0. \qquad (3.2.1.8)$$

Оптимальный план двойственной задачи

$$U^* = (0; p_{21}; 0), \qquad (3.2.1.9)$$

$$V^* = \big(0; c_1 \cdot (k_2 - k_1)\big), \qquad (3.2.1.10)$$

$$W_{min} = b_2 \cdot p_{21}. \qquad (3.2.1.11)$$

В обеих задачах оптимальные планы единственные, особенностей нет. Случай описан в [8, с.43-44].

3.2.2. Значение n_1 равно отношениям n_{11} и n_{21}.

Рассматриваем вариант 4. Для него выполняются отношения: $n_1=n_{11}=n_{21}$, $n_{31}>n_{21}$. Оптимальный план и максимальное значение целевой функции определяются соотношениями (3.2.1.3-3.2.1.5). Значение y_1^* станет равным нулю, (3.1.2.1), y_2^* равно нулю, (3.1.3.1), y_3^* вычисляется по формуле (3.2.1.2). Оптимальные остатки равны:

$$Y^* = (0; 0; b_3 - a_{31} \cdot n_{21}). \qquad (3.2.2.1)$$

В двойственной задаче u_3^* останется равным нулю, (3.2.1.6), v_1^* и v_2^* удовлетворяют условиям (3.1.1.8) и (3.1.3.9), оптимальный план двойственной задачи – условиям (3.1.1.10) и (3.1.1.11). Значения u_1^* и u_2^* будем искать в виде (3.1.2.3) и (3.1.3.3). Подставляем их в условия (3.1.1.10) и (3.1.1.11):

$$t_1 + t_2 = 1, \quad (3.2.2.2)$$

$$k_1 \cdot t_1 + k_2 \cdot t_2 \ge k_1. \qquad (3.2.2.3)$$

При условии (1.5) неравенство (3.2.2.3) выполняется автоматически, параметры t_1 и t_2 изменяются от 0 до 1 включительно, [11, с. 817-818], (3.1.2.7) и (3.1.3.7). Значение v_1^* равно нулю (3.1.1.8), v_2^* вычисляется по формуле:

$$v_2^* = c_1 \cdot (k_1 t_1 + k_2 t_2 - k_1) > 0, \quad (3.2.2.4)$$

где t_1 и t_2 удовлетворяют условию (3.2.2.2).

Расширенный оптимальный план двойственной задачи:

$$U^* = (p_{11} \cdot t_1; p_{21} \cdot t_2; 0), \qquad (3.2.2.5)$$

$$V^* = \big(0; c_1 \cdot (k_1 t_1 + k_2 t_2 - k_1)\big), \qquad (3.2.2.6)$$

$$W_{min} = b_1 \cdot p_{11} = b_2 \cdot p_{21}, \quad (3.2.2.7)$$

где t_1 и t_2 удовлетворяют условию (3.2.2.2).

В прямой задаче оптимальный план единственный, а в двойственной нет. Из (3.1.2.3), (3.1.3.3) и (3.1.2.7), (3.1.3.7) предельная полезность ресурса R_1 изменяется в пределах (3.1.2.13), а предельная полезность ресурса R_2 изменяется в пределах (3.1.3.12).

Вариант 4 как частный случай описан в [8, с.44-45].

3.3. Значение m_1 равно m_{11}

Осталось рассмотреть для m_1 значение m_{11}, когда $m_1 \neq m_{21}$, $m_1 \neq m_{31}$. Это вариант 1 значения m_1, для которого оптимальный план в двойственной задаче не единственный. Среди оптимальных объёмов выпуска продукции A_2 могут быть ненулевые значения. Это означает, что для обоих видов продукции показатель эффективности производства продукции равен оценкам используемых в нём ресурсов:

$$v_1^* = 0,\ v_2^* = 0. \qquad (3.3.1)$$

Такое возможно только для плана, в котором оценки ресурсов равны:

$$u_1^* = p_{11} = p_{12};\ u_2^* = 0,\ u_3^* = 0. \quad (3.3.2)$$

Оптимальные объёмы выпуска продукции определяются из условия прямой задачи для ресурса R_1:

$$x_1^* = n_{11}(1-t);\ x_2^* = n_{12}t, \qquad (3.3.3)$$

где параметр t удовлетворяет условию

$$0 \le t \le t_0. \quad (3.3.4)$$

Значение t_0 определяется из условий положительности остатков ресурсов:

$$y_1^* = 0,\ y_2^* = b_2 - a_{21}n_{11} - (a_{21}n_{11} - a_{22}n_{12})t,\ y_3^* = b_3 - a_{31}n_{11} - (a_{31}n_{11} - a_{32}n_{12})t, \ (3.3.5)$$

где t удовлетворяет условию (3.3.4).

Чтобы определить значение t_0, рассмотрим значение показателя m_2. Его значение может равняться m_{12}, m_{22} и m_{32}. Последовательно рассмотрим каждое значение.

Если $m_2 = m_{12}$, то $t_0 = 1$. Если $m_2 = m_{22}$, то

$$t_0 = \frac{\beta_{12} - \beta_{12}^{(1)}}{\beta_{12}^{(2)} - \beta_{12}^{(1)}}. \qquad (3.3.6)$$

Если $m_2 = m_{32}$, то

$$t_0 = min\left(\frac{\beta_{12} - \beta_{12}^{(1)}}{\beta_{12}^{(2)} - \beta_{12}^{(1)}}; \frac{\beta_{13} - \beta_{13}^{(1)}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}}\right). \qquad (3.3.7)$$

Таким образом, когда показатель m_1 равен только значению m_{11}, в прямой задаче есть оптимальные планы, при которых выпускается продукция A_2. Выпуск оптимальных планов определяется формулой (3.3.3), для которой граница изменения параметра t определяется по показателю m_2. Ресурс R_1 является дефицитным.

Если максимальный объём выпуска продукции A_2 ограничен только ресурсом R_1, то R_2 и R_3 избыточные, если – только ресурсами R_1 и R_2, то остаток ресурса R_2 может обращаться в ноль, ресурс R_3 является избыточным.

Если максимальный объём выпуска продукции A_2 ограничен ресурсом R_2 и не ограничен ресурсом R_3, то остаток ресурса R_2 может обращаться в ноль, ресурс R_3 является избыточным.

Если максимальный объём выпуска продукции A_2 ограничен ресурсом R_3, то остатки ресурсов R_2 и R_3 могут обращаться в ноль зависимости от значения минимума

(3.3.7). Если минимум достигается для ресурса R_2, то в ноль может обращаться остаток ресурса R_2, если для ресурса R_3, то в ноль может обращаться остаток ресурса R_3.

Выводы

Рассмотрены планы выпуска двух видов продукции с использованием трёх ресурсов в условиях, когда отношение эффективностей продукции A_2 и A_1 равно отношению удельных затрат ресурса R_1 в производстве продукции A_2 и A_1. При таких условиях наблюдается приоритет выпуска продукции A_1, кроме случая, когда максимальный объём выпуска продукции A_1 ограничен ресурсом R_1 ($n_1=n_{11}$).

В этом случае оптимальный план прямой задачи не единственный, среди оптимальных планов обязательно есть план, когда продукцию A_1 производить выгодно, кроме случая, когда максимальный объём и выпуска продукции A_2 ограничен ресурсом R_1 ($n_2=n_{21}$). Тогда есть план, в котором продукция A_1 не выпускается, а объём продукции A_2 равен n_2.

Работа является первой частью исследования особых рыночных условий производства двух видов продукции. В третьей части работы рассмотрен случай, когда индекс эффективности продукции A_2 равен индексу потребления ресурса R_3 [5]. Остаётся рассмотреть случай, когда индекс эффективности продукции A_2 равен индексу потребления ресурса R_2.

Библиографический список

1. Мамонов О. В. Использование методов линейного программирования при анализе производства продукции. // В сборнике: Актуальные проблемы агропромышленного комплекса сборник трудов научно-практической конференции преподавателей, студентов, магистрантов и аспирантов, посвященный 80-летию Новосибирского ГАУ. Новосибирский государственный аграрный университет. 2016. С. 194-198.

2. Мамонов О. В., Чумак М. В. Пример определения условий перехода предприятия на производство одного вида ресурса / Актуальные проблемы агропромышленного комплекса: сборник трудов научно-практической конференции преподавателей, студентов, магистрантов и аспирантов Новосибирского ГАУ. Новосибирский государственный аграрный университет. 2017. С. 252-254.

3. Мамонов О. В. Анализ эффективного использования двух ресурсов для предприятия, выпускающего два вида продукции // Агропродовольственная экономика. 2016. № 12. С. 30-62.

4. Мамонов О. В., Елисеева Ю. В. Оптимальные планы производства продукции двух видов с использованием двух ресурсов. / Теория и практика современной

аграрной науки. Сборник II Национальной (всероссийской) конференции. 2019. С. 537-542.

5. Михальчишина Ю.А., Беляева Е.В. Особые рыночные условия производства двух видов продукции. Часть 3 / В сборнике: Актуальные проблемы аграрной науки: прикладные и исследовательские аспекты. сборник научных трудов II Всероссийской (национальной) научно-практической конференции. Нальчик, 2022. С. 271-277.

6. Бабин В. Н., Бабина Ю. В. Условие полного расхода всех ресурсов в производстве двух видов продукции. Часть 1 / Теория и практика современной аграрной науки: сборник IV национальной (всероссийской) научной конференции с международным участием. Новосибирск, 2021. С. 1025-1032.

7. Babin, V. N. The rational use of resources provided two products output, part 2 / V. N. Babin, Yu. A. Mikhalchishina, Yu. V. Babina // European Proceedings of Social and Behavioural Sciences: Proceedings of the Conference on Land Economy and Rural Studies Essentials. Omsk: European Publisher, 2022. pp. 103-112. DOI 10.15405/epsbs.2022.02.14

8. Мамонова М. О. Сироткина Л. Н. Отношение предпочтения выпуска двух видов продукции в задаче об использовании ресурсов. Часть 1 / Экономика, управление, финансы и туризм: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции, 10 сентября 2022 г., Москва: Профессиональная наука, 2022. С. 28-49.DOI 10.54092/9781471048616_28

9. Мамонова М.О., Сироткина Л.Н. Отношение предпочтения выпуска двух видов продукции в задаче об использовании ресурсов. Часть 2 / Фундаментальные основы и практические перспективы: сборник научных трудов по материалам Международного симпозиума. Самара, 2023. С. 13-36.

10. Мамонов О. В. Анализ использования двух ресурсов предприятия с двумя видами продукции с помощью графического способа решения задачи линейного программирования // Агропродовольственная экономика. 2016. № 10. С. 4-42.

11. Мамонова М.О., Сироткина Л.Н. Поиск границ изменения параметров оптимальных решений в двойственной задаче об оптимальном использовании ресурсов / Роль аграрной науки в устойчивом развитии сельских территорий: сборник VIII Всероссийской (национальной) научной конференции с международным участием. Новосибирск. 2023. С. 817-821.