УДК 330.4; 338.12

Мамонова М.О., Михальчишина Ю.А., Беляева Е.В., Гаврюк С.А.

Особые рыночные условия производства двух видов продукции. Часть 2

Special market conditions for the production of two types of products. Part 2

Мамонова Мария Олеговна,
Михальчишина Юлия Андреевна,
Беляева Елена Викторовна,
Гаврюк Серафима Андреевна
1. студент факультета бизнеса
Новосибирского государственного технического университета,
Новосибирск, Россия
2. к. ф.-м. н., доцент кафедры информационных технологий и моделирования
ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ
Новосибирск, Россия
3. аспирант, ассистент кафедры управления и отраслевой экономики,
ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ
Новосибирск, Россия
4. студентка, факультет экономики и управления,
ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ
Новосибирск, Россия
Mamonova Maria Olegovna,
Mikhalchishina Yulia Andreevna,
Belyaeva Elena Viktorovna,
Gavryuk Serafima Andreevna
1. student of the faculty of business,
Novosibirsk State Technical University
Novosibirsk, Russia
2. candidate of physical and mathematical sciences,
associate professor, department of information technologies and modeling,
faculty of economics and management
Novosibirsk State Agrarian University
Novosibirsk, Russia
3. postgraduate student, assistant at the department of management and industrial economics,
faculty of economics and management
Novosibirsk State Agrarian University
Novosibirsk, Russia
4. student, faculty of tconomics and management,
Novosibirsk State Agrarian University
Novosibirsk, Russia

Аннотация. *В статье рассматривается задача об оптимальном использовании трёх ресурсов при выпуске двух видов продукции. Проводится анализ планов в особых условиях, когда показатели эффективности производства производимой продукции пропорциональны удельным расходам одного из ресурсов на выпуск этой продукции. Для поиска и анализа оптимальных планов производства и оценок ресурсов используется теория двойственности в линейном программировании.*

Ключевые слова: *задача линейного программирования, задача об оптимальном использовании ресурсов, двойственная задача, теорема равновесия, особые рыночные условия*

Abstract. *The article discusses the problem of the optimal use of three resources in the production of two types of products. The analysis of plans is carried out in special conditions, when the indicators of the efficiency of the production of manufactured products are proportional to the specific expenditure of one resource for the output of these products. To find and analyze optimal production plans and resource estimates, the theory of duality in linear programming is used.*

Keywords: *linear programming problem, the problem of optimal use of resources, dual task, equilibrium theorem, special market conditions*

Введение

Производство двух видов продукции в особых рыночных условиях рассматривались авторами в работах [1-2]. Особый интерес исследования таких условий состоит в том, что возможно неоднозначное решение задачи об оптимальном использовании ресурсов (ОИР), которая является моделью такой задачи. Неоднозначность оптимальных планов в задаче ОИР интересна с точки зрения перехода производства с одного режима в другой, с одной технологии к другой технологии. Представление производства продукции в виде задачи об оптимальном использовании ресурсов рассматривалось в статье [3]. В ней задача ОИР рассматривалась как пара двойственных задач линейного программирования, была дана экономическая интерпретация переменных и ограничений обоих задач. Задача ОИР для трёх ресурсов и двух видов продукции рассматривалась также в работах [4-7]. В [4-5] определялись условия выпуска только одного вида продукции, а в [6-7] условия полного расхода всех трёх ресурсов.

Надо отметить, что анализ оптимальных планов задачи ОИР для двух ресурсов и двух видов продукции был проведён в статье [8], а в статье [9] результаты анализа были представлены в виде таблицы.

1. Постановка задачи

Задача ОИР для трёх ресурсов и двух видов продукции была сформулирована в [1-7] и [10]. В них ресурсы обозначались R_1, R_2, R_3, производимая продукция A_1 и A_2, удельные расходы ресурса R_i в производстве продукции A_j – a_{ij} (i=1,2,3, j=1,2), запасы ресурсов b_i (i=1,2,3), показатели производства единицы продукции A_j – c_j (j=1,2), показатель эффективности производства всей продукции – Z, оценка полезности всех ресурсов – W.

Математическая модель задачи ОИР была представлена в виде пары двойственных задач [1-7]:

прямой

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \le & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \le & b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & \le & b_3 \end{cases} \quad . \qquad (1.1)$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$
$$Z = c_1x_1 \quad +c_2x_2 \quad \to \quad max$$

и двойственной

$$
\begin{cases}
a_{11}u_1 & +a_{21}u_2 & +a_{31}u_3 & \geq & c_1 \\
a_{12}u_1 & +a_{22}u_2 & +a_{32}u_3 & \geq & c_2
\end{cases}
\\
u_1 \geq 0 \quad u_2 \geq 0 \quad u_3 \geq 0
\\
W = b_1u_1 \quad +b_2u_2 \quad +b_3u_3 \quad \rightarrow \quad min
\qquad (1.2)
$$

где: x_1 – количество продукции A_1, x_2 – количество продукции A_2, u_1 – оценка использования в производстве ресурса R_1, u_2 – оценка использования ресурса R_2, u_3 – оценка использования ресурса R_3.

Для анализа оптимальных планов задач (1.1)-(1.2) в статьях [1-7] определялись вспомогательные коэффициенты:

1) отношение затрат ресурса R_i в производстве единицы продукции A_2 и единицы продукции A_1:

$$k_i = \frac{a_{i2}}{a_{i1}}, \qquad (1.3)$$

где i=1, 2, 3.

2) отношение показателя эффективности производства продукции A_2 к показателю эффективности производства продукции A_1

$$k = \frac{c_2}{c_1}. \qquad (1.4)$$

Полагалось, что:

$$k_1 < k_2 < k_3 \ (1.5)$$

и

$$a_{11} \neq 0, a_{12} \neq 0, \ a_{21} \neq 0, \ a_{22} \neq 0, a_{31} \neq 0, a_{32} \neq 0. \qquad (1.6)$$

Для введённых показателей производство в особых рыночных условиях производства продукции означает, что отношение показателя эффективности производства продукции A_2 к показателю эффективности производства продукции A_1 (показатель k) равно отношению затрат одного из трёх ресурсов в производстве единицы продукции A_2 и единицы продукции A_1 (показателям k_1, k_2, k_3)

$$k = k_1, \text{ или } k = k_2, \text{ или } k = k_3. \quad (1.7)$$

В статье [1] исследовались особые рыночные условия при значении k равном k_1, в статье [2] – при значении k равном k_3, в данной работе будет рассмотрены особые рыночные условия, когда

$$k = k_2. \qquad (1.8)$$

2. Методика и методология исследования

Кроме показателей k_1, k_2, k_3, k для анализа оптимальных планов в работах [1-7] были рассмотрены и другие вспомогательные показатели:

1) отношение затрат ресурсов R_m и R_i в производстве единицы продукции A_j:

$$\beta_{im}^{(j)} = \frac{a_{mj}}{a_{ij}}, \qquad (2.1)$$

где i=1, 2, 3; j=1, 2; m=1, 2, 3, $i \neq m$. Этот показатель можно называть как относительный коэффициент расхода ресурса R_m к расходу ресурса R_i в производстве продукции A_j.

2) отношение запасов ресурсов R_m и R_i:

$$\beta_{im} = \frac{b_m}{b_i}, \qquad (2.2)$$

где i=1, 2, 5; m=1, 2, 3, $i \neq m$.

3) максимальное количество продукции A_j, которое можно получить при полном расходе ресурса R_i:

$$n_{ij} = \frac{b_i}{a_{ij}}, \qquad (2.3)$$

где i=1, 2, 3; j=1, 2;

4) максимальную оценку ресурса R_i в производстве единицы продукции A_j

$$p_{ij} = \frac{c_j}{a_{ij}}, \qquad (2.4)$$

где i=1, 2, 3; j=1, 2.

5) максимальный объём продукции A_j, который можно произвести, используя все ресурсы, обозначаемый n_j:

$$n_j = \min_{1 \le i \le 3} n_{ij}. (2.5)$$

3. Результаты

Как и в статьях [1-2] предполагаем, что выполняются условия (1.5), а показатель k равен значению k_2, (1.8). Анализ оптимальных планов прямой задачи ОИР будем проводить в зависимости от значений максимально возможных объёмов выпуска продукции A_1 и A_2, которые определяются соотношениями (2.5) и обозначаются n_1 и n_2. В отличие от статей [1-2] исследование возможных решений прямой и двойственной задач будем проводить не по значениям одного показателя n_1 или n_2, а сразу двух. Последовательно рассмотрим следующие значения показателей n_1 и n_2: 1) $n_1=n_{31}$; 2) $n_2=n_{12}$; 3) $n_1=n_{21}$; 4) $n_2=n_{22}$; 5) $n_1=n_{12}$, а $n_2=n_{22}$; 5) $n_1=n_{11}$, а $n_2=n_{32}$.

3.1. Значение n_1 равно n_{31}

Рассматриваем случай равенства значения n_1 значению n_{31}, когда минимум отношений запасов ресурсов и удельных расходов для продукции A_1 достигается для ресурса R_3. Анализ проведём аналогично исследованию в статье [1, С. 22-26]. В статье [4, С. 33-41] были найдены оптимальные решения задач (1.1)-(1.2), когда

$$n_1 = n_{31} \qquad (3.1.1)$$

и

$$k < k_3. \qquad (3.1.2)$$

При условиях (1.8) и (3.1.1) оптимальным планом прямой задачи будет расширенное решение:

$$X^* = (n_{31}; 0), \qquad (3.1.3)$$

$$Y^* = (b_1 - a_{11} \cdot n_{31}; b_2 - a_{21} \cdot n_{31}; 0), \qquad (3.1.4)$$

$$Z_{max} = c_1 \cdot n_{31}. \qquad (3.1.5)$$

Оптимальные значения остатков ресурсов R_1 и R_2 равняются нулю или отличны от него в зависимости от равенства значений n_{11} и n_{21} значению n_{31}. Для условия (3.1.1) возможны четыре варианта: 1) $n_{11} \neq n_{31}$, $n_{21} \neq n_{31}$; 2) $n_{11} = n_{31}$, $n_{21} \neq n_{31}$; 3) $n_{11} \neq n_{31}$, $n_{21} = n_{31}$; 4) $n_{31} = n_{11} = n_{21}$. Последовательно рассмотрим каждый из вариантов.

3.1.1. Значение n_1 равно только отношению n_{31}.

Пусть выполняется условие (3.1.1) и

$$n_{11} > n_{31}, n_{21} > n_{31} \quad . \qquad (3.1.1.1)$$

Тогда оптимальным планом остатков ресурсов остаётся план (3.1.4) с ненулевыми остатками ресурсов R_1 и R_2. Расширенное оптимальное решение двойственной задачи было определено в [4, С. 36] при условии (1.8):

$$U^* = (0; 0; p_{31}), \qquad (3.1.1.2)$$

$$V^* = \left(0; c_1 \cdot (k_3 - k_2)\right), \qquad (3.1.1.3)$$

$$W_{min} = b_3 \cdot p_{31}. \qquad (3.1.1.4)$$

Оценка способа производства продукции A_2 строго больше нуля, продукцию A_2 выпускать не выгодно. Ресурс R_3 дефицитный, ресурсы R_1 и R_2 избыточные.

В обеих задачах оптимальные планы единственные.

3.1.2. Значение n_1 равно отношениям n_{11} и n_{31}.

Пусть выполняется условие (3.1.1) и

$$n_{11} = n_{31}, n_{21} > n_{31} \quad . \qquad (3.1.2.1)$$

Тогда в оптимальном плане остаток ресурса R_1 станет равным нулю, а ресурса R_2 будет больше нуля, оптимальный план остатков ресурсов будет

$$Y^* = (0; b_2 - a_{21} \cdot n_{31}; 0). \qquad (3.1.2.2)$$

Расширенное оптимальное решение двойственной задачи было определено в [4, С. 38-40] при условии (1.8):

$$U^* = (p_{11} \cdot t_1; 0; p_{31} \cdot t_3), \qquad (3.1.2.3)$$

$$V^* = \left(0; c_1 \cdot (k_1 t_1 + k_3 t_3 - k_2)\right), \qquad (3.1.2.4)$$

$$W_{min} = b_3 \cdot p_{31}, \qquad (3.1.2.5)$$

где значения параметров t_1 и t_3 положительные и удовлетворяют условиям:

$$t_1 + t_3 = 1, \quad (3.1.2.6)$$

$$k_1 \cdot t_1 + k_3 \cdot t_3 \geq k_2. \qquad (3.1.2.7)$$

Интервалы значений параметров t_1 и t_3 определяются по формулам статьи [11, С. 818] для условия (1.5):

$$0 \leq t_1 \leq \frac{k_3 - k_2}{k_3 - k_1}, \qquad (3.1.2.8)$$

$$\frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1} \leq t_3 \leq 1. \qquad (3.1.2.9)$$

Интервалы значений оптимальных оценок ресурсов R_1 и R_3 равны:

$$0 \leq u_1^* \leq p_{11} \cdot \frac{k_3 - k_2}{k_3 - k_1}, \quad (3.1.2.10)$$

$$p_{31} \cdot \frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1} \leq u_3^* \leq p_{31}. \qquad (3.1.2.11)$$

Отметим, что оценка способа производства продукции A_2 может равняться нулю при

$$t_1 = \frac{k_3 - k_2}{k_3 - k_1}, \qquad (3.1.2.12)$$

$$t_3 = \frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1}. \quad (3.1.2.13)$$

Ресурс R_3 дефицитный, его оценка в оптимальной системе оценок в ноль не обращается. Ресурс R_1 дефицитным не является, так как есть система оптимальных оценок ресурсов, при которой его оценка равна нулю. Ресурс R_2 избыточный.

В прямой задаче оптимальный план единственный, а в двойственной нет.

3.1.3. Значение n_1 равно отношениям n_{21} и n_{31}.

Теперь пусть выполняется условие (3.1.1) и

$$n_{11} > n_{31}, n_{21} = n_{31} \quad . \quad (3.1.3.1)$$

Тогда в оптимальном плане остаток ресурса R_2 станет равным нулю, а ресурса R_1 будет больше нуля, оптимальный план остатков ресурсов будет

$$Y^* = (b_1 - a_{11} \cdot n_{31}; 0; 0). \quad (3.1.3.2)$$

Расширенное оптимальное решение двойственной задачи было определено в [4, С. 37] при условии (1.8):

$$U^* = (0; p_{21} \cdot t_2; p_{31} \cdot t_3), \quad (3.1.3.3)$$

$$V^* = \big(0; c_1 \cdot (k_2 t_2 + k_3 t_3 - k_2)\big), \quad (3.1.3.4)$$

$$W_{min} = b_2 \cdot p_{21} = b_3 \cdot p_{31}, \quad (3.1.3.5)$$

где значения параметров t_2 и t_3 положительные и удовлетворяют условиям:

$$t_2 + t_3 = 1, \quad (3.1.3.6)$$

$$k_2 \cdot t_2 + k_3 \cdot t_3 \geq k_2. \quad (3.1.3.7)$$

Интервалы значений параметров t_1 и t_3 определяются по формулам статьи [11, С. 818] для условия (1.5):

$$0 \leq t_2 \leq 1, \quad (3.1.3.8)$$

$$0 \leq t_3 \leq 1. \quad (3.1.3.9)$$

Интервалы значений оптимальных оценок ресурсов R_2 и R_3 равны:

$$0 \leq u_2^* \leq p_{21}, \quad (3.1.3.10)$$

$$0 \leq u_3^* \leq p_{31}. \quad (3.1.3.11)$$

Отметим, что оценка способа производства продукции A_2 может равняться нулю при t_2=1 и t_3=0. Продукция A_2 при оптимальном плане не выпускается, так как есть оценки способа производства строго большие нуля.

Теперь ресурс R_3 дефицитным не является, так как есть система оптимальных оценок ресурсов, при которой оценка ресурса равна нулю. Такой же статус и у ресурса R_2, хотя его оптимальный остаток равен нулю. Ресурс R_1 избыточный.

В прямой задаче оптимальный план единственный, а в двойственной нет.

3.1.4. Значение n_1 равно отношениям n_{11}, n_{21} и n_{31}.

Рассмотрим четвёртый вариант. Теперь пусть выполняется условие (3.1.1) и

$$n_{11} = n_{31}, n_{21} = n_{31} \quad . \quad (3.1.4.1)$$

Тогда в оптимальном плане остатки всех ресурсов станут равны нулю:

$$Y^* = (0; 0; 0). \quad (3.1.4.2)$$

Расширенное оптимальное решение двойственной задачи было определено в [4, С. 40] при условии (1.8):

$$U^* = (p_{11} \cdot t_1; p_{21} \cdot t_2; p_{31} \cdot t_3), \qquad (3.1.4.3)$$

$$V^* = \big(0; c_1 \cdot (k_1 t_1 + k_2 t_2 + k_3 t_3 - k_2)\big), \qquad (3.1.4.4)$$

$$W_{min} = b_2 \cdot p_{21} = b_3 \cdot p_{31}, \quad (3.1.4.5)$$

где значения параметров t_1, t_2 и t_3 положительные и удовлетворяют условиям:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1, \qquad (3.1.4.6)$$

$$k_1 \cdot t_1 + k_2 \cdot t_2 + k_3 \cdot t_3 \geq k_2. \qquad (3.1.4.7)$$

Интервалы значений параметров t_1, t_2 и t_3 определяются по формулам статьи [11, С. 819-820] для условия (1.5):

$$0 \leq t_1 \leq \frac{k_3 - k_2}{k_3 - k_1}, \qquad (3.1.4.9)$$

$$0 \leq t_2 \leq 1, \quad (3.1.4.10)$$

$$0 \leq t_3 \leq 1. \quad (3.1.4.11)$$

Интервалы значений оптимальных оценок ресурсов равны:

$$0 \leq u_1^* \leq p_{11} \cdot \frac{k_3 - k_2}{k_3 - k_1}, \ (3.1.4.12)$$

$$0 \leq u_2^* \leq p_{21}, \qquad (3.1.4.13)$$

$$0 \leq u_3^* \leq p_{31}. (3.1.2.14)$$

Отметим, что оценка способа производства продукции A_2 может равняться нулю, например, при t_1=0, t_2=1 и t_3=0. Продукция A_2 при оптимальном плане не выпускается, так как есть оценки способа производства строго большие нуля.

При оптимальном плане остатки всех ресурсов равны нулю, но они не являются дефицитными, так как есть системы оптимальных оценок ресурсов, при которых их оценки равны нулю.

В прямой задаче оптимальный план единственный, а в двойственной нет.

Таким образом, при равенстве значения показателя n_1 значению n_{31} план прямой задачи единственный. Единственность оптимальных оценок ресурсов в двойственной задаче наблюдается только, когда n_1 не равняется значениям показателей n_{11} и n_{21}.

Особые рыночные условия никак не проявляются в производстве.

3.2. Значение n_2 равно n_{12}

Рассматриваем случай равенства значения n_2 значению n_{12}, когда минимум отношений запасов ресурсов и удельных расходов для продукции A_2 достигается для ресурса R_1. Анализ проведём аналогично исследованию в статье [2]. В статье [5, С. 20-28] были найдены оптимальные решения задач (1.1)-(1.2), когда

$$n_2 = n_{12} \qquad (3.2.1)$$

и

$$k > k_1. \qquad (3.2.2)$$

При условиях (1.8) и (3.2.1) оптимальным планом прямой задачи станет расширенное решение:

$$X^* = (0; n_{12}), \qquad (3.2.3)$$
$$Y^* = (0; b_2 - a_{22} \cdot n_{12}; b_3 - a_{32} \cdot n_{12}), \qquad (3.2.4)$$
$$Z_{max} = c_2 \cdot n_{12}. \qquad (3.1.5)$$

Равенство нулю или отличие от нуля оптимальных значений остатков ресурсов R_2 и R_3 зависят от равенства значений n_{22} и n_{32} значению n_{12}. Для условия (3.2.1) возможны также четыре варианта: 1) $n_{22} \neq n_{12}$, $n_{32} \neq n_{12}$; 2) $n_{22} = n_{12}$, $n_{32} \neq n_{12}$; 3) $n_{22} \neq n_{12}$, $n_{32} = n_{12}$; 4) $n_{12} = n_{22} = n_{32}$. Последовательно рассмотрим каждый из вариантов.

3.2.1. Значение n_2 равно только отношению n_{12}.

Пусть выполняется условие (3.2.1) и

$$n_{22} > n_{12}, n_{32} > n_{12} \quad . \qquad (3.2.1.1)$$

Тогда оптимальным планом остатков ресурсов остаётся план (3.2.4) с ненулевыми остатками ресурсов R_2 и R_3. Расширенное оптимальное решение двойственной задачи при условии (1.8):

$$U^* = (p_{12}; 0; 0), \qquad (3.2.1.2)$$
$$V^* = \left(c_2 \cdot \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right); 0\right), \qquad (3.2.1.3)$$
$$W_{min} = b_1 \cdot p_{12}. \qquad (3.2.1.4)$$

Оценка способа производства продукции A_1 строго больше нуля, продукцию A_1 выпускать не выгодно. Ресурс R_1 дефицитный, ресурсы R_2 и R_3 избыточные.

В обеих задачах оптимальные планы единственные.

3.2.2. Значение n_2 равно только отношениям n_{12} и n_{22}.

Переходим ко второму варианту. Пусть выполняется условие (3.2.1) и

$$n_{22} = n_{12}, n_{32} > n_{12} \quad . \qquad (3.2.2.1)$$

Тогда в оптимальном плане остаток ресурса R_1 станет равным нулю, а ресурса R_2 будет больше нуля, оптимальный план остатков ресурсов будет

$$Y^* = (0; 0; b_3 - a_{32} \cdot n_{12}). \qquad (3.2.2.2)$$

Расширенное оптимальное решение двойственной задачи при условии (1.8):

$$U^* = (p_{12} \cdot t_1;\ p_{22} \cdot t_2; 0), \qquad (3.2.2.3)$$
$$V^* = \left(0; c_2 \cdot \left(\frac{1}{k_1} \cdot t_1 + \frac{1}{k_2} \cdot t_2 - \frac{1}{k_2}\right)\right), \qquad (3.2.2.4)$$
$$W_{min} = b_1 \cdot p_{12} = b_2 \cdot p_{22}, \quad (3.2.2.5)$$

где значения параметров t_1 и t_2 положительные и удовлетворяют условиям:

$$t_1 + t_2 = 1, \quad (3.2.2.6)$$
$$\frac{1}{k_1} \cdot t_1 + \frac{1}{k_2} \cdot t_2 \geq \frac{1}{k_2}. \qquad (3.2.2.7)$$

Интервалы значений параметров t_1 и t_2 для условия (1.5):

$$0 \leq t_1 \leq 1, \quad (3.2.2.8)$$
$$0 \leq t_3 \leq 1. \quad (3.2.2.9)$$

Интервалы значений оптимальных оценок ресурсов R_1 и R_2 равны:

$$0 \leq u_1^* \leq p_{12}, \qquad (3.2.3.10)$$
$$0 \leq u_2^* \leq p_{22}. \qquad (3.2.3.11)$$

Отметим, что оценка способа производства продукции A_1 может равняться нулю при t_1=0 и t_2=1. Продукция A_1 при оптимальном плане не выпускается, так как есть оценки способа производства строго большие нуля.

Ресурс R_1 дефицитным не является, так как есть система оптимальных оценок ресурсов, при которой оценка ресурса равна нулю. Такой же статус и у ресурса R_2, хотя его оптимальный остаток равен нулю. Ресурс R_3 избыточный.

В прямой задаче оптимальный план единственный, а в двойственной нет.

3.2.3. Значение n_2 равно отношениям n_{12} и n_{32}.

Пусть выполняется условие (3.1.1) и

$$n_{22} > n_{12}, n_{32} = n_{12} \quad . \qquad (3.2.3.1)$$

Тогда в оптимальном плане остаток ресурса R_3 станет равным нулю, а ресурса R_2 будет больше нуля, оптимальный план остатков ресурсов будет

$$Y^* = (0; b_2 - a_{22} \cdot n_{12}; 0). \qquad (3.2.3.2)$$

Расширенное оптимальное решение двойственной задачи при условии (1.8):

$$U^* = (p_{12} \cdot t_1; 0; p_{32} \cdot t_3), \qquad (3.2.3.3)$$

$$V^* = \left(0; c_2 \cdot \left(\frac{1}{k_1} \cdot t_1 + \frac{1}{k_3} \cdot t_3 - \frac{1}{k_2}\right)\right), \qquad (3.2.3.4)$$

$$W_{min} = b_1 \cdot p_{12}, \qquad (3.2.3.5)$$

где значения параметров t_1 и t_2 положительные и удовлетворяют условиям:

$$t_1 + t_3 = 1, \quad (3.2.3.6)$$

$$\frac{1}{k_1} \cdot t_1 + \frac{1}{k_3} \cdot t_3 \geq \frac{1}{k_2}. \qquad (3.2.3.7)$$

Интервалы значений параметров t_1 и t_3 для условия (1.5) согласно анализу решений системы неравенств (3.2.3.6)-(3.2.3.7) в статье [11]:

$$\frac{\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_3}}{\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_3}} \leq t_1 \leq 1, \qquad (3.2.3.8)$$

$$0 \leq t_3 \leq \frac{\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}}{\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_3}}. \qquad (3.2.3.9)$$

Преобразуем дроби в неравенствах (3.2.3.8) и (3.2.3.9):

$$\frac{\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_3}}{\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_3}} = \frac{k_3-k_2}{k_3-k_1} \cdot \frac{k_3 \cdot k_2}{k_3 \cdot k_1} = \frac{k_3-k_2}{k_3-k_1} \cdot \frac{k_2}{k_1}, \qquad (3.2.3.10)$$

$$\frac{\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}}{\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_3}} = \frac{k_2-k_1}{k_3-k_1} \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{k_3 \cdot k_1} = \frac{k_2-k_1}{k_3-k_1} \cdot \frac{k_2}{k_3}. \qquad (3.2.3.11)$$

Тогда интервалы значений параметров t_1 и t_3 будут иметь вид:

$$\frac{k_3-k_2}{k_3-k_1} \cdot \frac{k_2}{k_1} \leq t_1 \leq 1, \quad (3.2.3.12)$$

$$0 \leq t_3 \leq \frac{k_2-k_1}{k_3-k_1} \cdot \frac{k_2}{k_3}. \quad (3.2.3.13)$$

Интервалы значений оптимальных оценок ресурсов R_1 и R_3 равны:

$$p_{12} \cdot \frac{k_3-k_2}{k_3-k_1} \cdot \frac{k_2}{k_1} \leq u_1^* \leq 1, \qquad (3.2.3.14)$$

$$0 \leq u_3^* \leq p_{32} \cdot \frac{k_2-k_1}{k_3-k_1} \cdot \frac{k_2}{k_3}. \qquad (3.2.3.15)$$

Отметим, что оценка способа производства продукции A_1 может равняться нулю при

$$t_1 = \frac{k_3-k_2}{k_3-k_1} \cdot \frac{k_2}{k_1}, \qquad (3.2.3.14)$$

$$t_3 = \frac{k_2-k_1}{k_3-k_1} \cdot \frac{k_2}{k_3}. \qquad (3.2.3.15)$$

Ресурс R_1 дефицитный, его оценка в оптимальной системе оценок в ноль не обращается. Ресурс R_3 дефицитным не является, так как есть система оптимальных оценок ресурсов, при которой его оценка равна нулю. Ресурс R_2 избыточный.

В прямой задаче оптимальный план единственный, а в двойственной нет.

3.2.4. Значение n_2 равно отношениям n_{12}, n_{22} и n_{32}.

Рассматриваем четвёртый вариант. Опять, пусть выполняется условие (3.1.1) и

$$n_{11} = n_{21} = n_{31} \qquad (3.2.4.1)$$

В оптимальном плане остатки всех ресурсов станут равны нулю:

$$Y^* = (0; 0; 0). \qquad (3.2.4.2)$$

Расширенное оптимальное решение двойственной задачи при условии (1.8):

$$U^* = (p_{12} \cdot t_1; p_{22} \cdot t_2; p_{32} \cdot t_3), \qquad (3.2.4.3)$$

$$V^* = \left(0; c_2 \cdot \left(\frac{1}{k_1} \cdot t_1 + \frac{1}{k_2} \cdot t_2 + \frac{1}{k_3} \cdot t_3 - \frac{1}{k_2}\right)\right), \qquad (3.2.4.4)$$

$$W_{min} = b_1 \cdot p_{12} = b_2 \cdot p_{22}, \quad (3.2.4.5)$$

где значения параметров t_1, t_2 и t_3 положительные и удовлетворяют условиям:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1, \qquad (3.2.4.6)$$

$$\frac{1}{k_1} \cdot t_1 + \frac{1}{k_2} \cdot t_2 + \frac{1}{k_3} \cdot t_3 \geq \frac{1}{k_2}. \qquad (3.2.4.7)$$

Интервалы значений параметров t_1, t_2 и t_3 определяются по формулам статьи [11, С. 819-820] для условия (1.5):

$$0 \leq t_1 \leq 1, \quad (3.2.4.9)$$

$$0 \leq t_2 \leq 1, \quad (3.2.4.10)$$

$$0 \leq t_3 \leq \frac{k_2-k_1}{k_3-k_1} \cdot \frac{k_2}{k_3}. \quad (3.2.4.11)$$

Интервалы значений оптимальных оценок ресурсов равны:

$$0 \leq u_1^* \leq p_{12}, \qquad (3.2.4.12)$$

$$0 \leq u_2^* \leq p_{22}, \qquad (3.2.3.13)$$

$$0 \leq u_3^* \leq p_{32} \cdot \frac{k_2-k_1}{k_3-k_1} \cdot \frac{k_2}{k_3}. \qquad (3.2.2.14)$$

Отметим, что оценка способа производства продукции A_1 может равняться нулю, например, при t_1=0, t_2=1 и t_3=0. Продукция A_1 при оптимальном плане не выпускается, так как есть оценки способа производства строго большие нуля.

При оптимальном плане остатки всех ресурсов равны нулю, но они не являются дефицитными, так как есть системы оптимальных оценок ресурсов, при которых их оценки равны нулю.

В прямой задаче оптимальный план единственный, а в двойственной нет.

Таким образом, при равенстве значения показателя n_2 значению m_{12} план прямой задачи единственный. Единственность оптимальных оценок ресурсов в двойственной задаче наблюдается только, когда n_2 не равняется значениям показателей n_{22} и n_{32}.

Особые рыночные условия никак не проявляются в производстве.

3.3. Значение n_1 равно n_{21} или n_2 равно n_{22}

Теперь, пусть n_1 равно значению n_{21} или n_2 равно значению n_{22}, один из минимумов отношений запасов ресурсов и удельных расходов для видов продукций A_1 и A_2 достигается для ресурса R_2. Тогда для значения n_1 и n_2 возможны следующие три случая: 1) $n_1=n_{21}$, $n_2=n_{22}$; 2) $n_1=n_{31}$, $n_2=n_{22}$; 3) $n_1=n_{21}$, $n_2=m_{12}$.

Последовательно рассмотрим эти случаи.

3.3.1. Значение n1 равно n21, значение n2 равно n22

Пусть n_1 равно значению n_{21}, а n_2 равно значению n_{22}. Решение прямой задачи будем искать в виде

$$x_1 = \frac{b_2}{a_{21}} \cdot t_1,\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} \cdot t_2, \quad (3.3.1.1)$$

где $t_1 \geq 0$ и $t_2 \geq 0$, так как $k=k_2$.

Тогда из условия $n_1=n_{21}$ следует, что $n_{11} \geq n_{21}$, а $n_{21}>n_{22}$, [1]. Это означает, что в системе неравенств (1.1) первое неравенство выполняется автоматически. Из условия $n_2=n_{22}$ следует, что $n_{32} \geq n_{22}$, а $n_{31}>n_{21}$, [2]. Это означает, что в системе неравенств (1.1) и третье неравенство выполняется автоматически.

Оптимальные планы удовлетворяют второму ограничению, выполняемому как равенство:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \text{ (3.3.1.2)}$$

Откуда получаем, что $t_1+t_2=1$ и выполняется условие положительности для параметров t_1 и t_2. Таким образом, получаем, что оптимальные значения переменных x_1 и x_2 равны:

$$x_1^* = \frac{b_2}{a_{21}} \cdot t_1,\ x_2^* = \frac{b_2}{a_{22}} \cdot t_2, \quad (3.3.1.3)$$

где параметры t_1 и t_2 должны удовлетворять условиям:

$$t_1 + t_2 = 1, \quad (3.3.1.4)$$

$$t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0. \text{ (3.3.1.5)}$$

Оптимальные значения остатков ресурсов будут равны:

$$y_1^* = b_1 - a_{21} \cdot \frac{b_2}{a_{21}} \cdot t_1 - a_{12} \cdot \frac{b_2}{a_{22}} \cdot t_2,\ y_2^* = 0,\ y_3^* = b_3 - a_{31} \cdot \frac{b_2}{a_{21}} \cdot t_1 - a_{32} \cdot \frac{b_2}{a_{22}} \cdot t_2, \quad (3.3.1.6)$$

где t_1 и t_2 удовлетворяют условиям (3.3.1.4) и (3.3.1.5).

Преобразуем выражения для оптимальных значений остатков ресурсов:

$$y_1^* = b_2\left(\beta_{21} - \beta_{21}^{(1)} \cdot t_1 - \beta_{21}^{(2)} \cdot t_2\right),\ y_2^* = 0,\ y_3^* = b_2\left(\beta_{23} - \beta_{23}^{(1)} \cdot t_1 - \beta_{23}^{(2)} \cdot t_2\right). \qquad (3.3.1.7)$$

Если положить

$$t_1 = t,\ t_2 = 1 - t, \quad (3.3.1.8)$$

То оптимальный план и оптимальные остатки ресурсов будут иметь вид

$$x_1^* = \frac{b_2}{a_{21}} \cdot t,\ x_2^* = \frac{b_2}{a_{22}} \cdot (1 - t), \qquad (3.3.1.9)$$

$$y_1^* = b_2 \left(\beta_{21} - \beta_{21}^{(1)} \cdot t - \beta_{21}^{(2)} \cdot (1 - t)\right), \quad (3.3.1.10)$$

$$y_2^* = 0, \quad (3.3.1.11)$$

$$y_3^* = b_2 \left(\beta_{23} - \beta_{23}^{(1)} \cdot t - \beta_{23}^{(2)} \cdot (1 - t)\right). \quad (3.3.1.12)$$

где параметр t должен удовлетворять условию:

$$0 \le t \le 1, \qquad (3.3.1.13)$$

Формулы (3.3.1.10) и (3.3.1.12) можно также записать в виде

$$y_1^* = b_2 \left(\beta_{21} - \beta_{21}^{(2)} - t \cdot \left(\beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)}\right)\right), \quad (3.3.1.14)$$

$$y_3^* = b_2 \left(t \cdot \left(\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}^{(1)}\right) - \left(\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}\right)\right). \quad (3.3.1.15)$$

Рассмотрим возможные дополнительные условия на параметр t. Положительность остатков ресурсов R_1 и R_3 равносильна условиям

$$\beta_{21} - \beta_{21}^{(2)} - t \cdot \left(\beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)}\right), \qquad (3.3.1.16)$$

$$t \cdot \left(\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}^{(1)}\right) - \left(\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}\right), \qquad (3.3.1.17)$$

которые в свою очередь равносильны условиям

$$t \le \frac{\beta_{21} - \beta_{21}^{(2)}}{\beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)}} = t_{01}, \qquad (3.3.1.18)$$

$$t \ge \frac{\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}}{\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}^{(1)}} = t_{03}. \qquad (3.3.1.19)$$

Неравенства (3.3.18) и (3.3.19) запишем в виде двойного неравенства

$$t_{03} = \frac{\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}}{\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}^{(1)}} \le t \le \frac{\beta_{21} - \beta_{21}^{(2)}}{\beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)}} = t_{01}. \quad (3.3.1.20)$$

С учётом условия (3.3.1.13) параметр t удовлетворяет условию

$$max\left(t_{03} = \frac{\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}}{\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}^{(1)}}; 0\right) \le t \le min\left(t_{01} = \frac{\beta_{21} - \beta_{21}^{(2)}}{\beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)}}; 1\right). \quad (3.3.1.21)$$

Отметим, что при $n_{11} \ge n_{21}$ выполняется соотношение

$$\frac{b_1}{a_{11}} \ge \frac{b_2}{a_{21}}, \quad (3.3.1.22)$$

что равносильно

$$\beta_{21} = \frac{b_1}{b_2} \ge \frac{a_{11}}{a_{21}} = \beta_{21}^{(1)}. \quad (3.3.1.23)$$

Из (3.3.1.23) следует, что

$$\beta_{21} - \beta_{21}^{(2)} \ge \beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)}, \qquad (3.3.1.24)$$

$$\frac{\beta_{21} - \beta_{21}^{(2)}}{\beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)}} = t_{01} \ge 1. \qquad (3.3.1.25)$$

Аналогично, при $n_{32} \ge n_{22}$ выполняется соотношение

$$\frac{b_3}{a_{32}} \ge \frac{b_2}{a_{22}}. \quad (3.3.1.26)$$

Это равносильно

$$\beta_{23} = \frac{b_3}{b_2} \geq \frac{a_{32}}{a_{22}} = \beta_{23}^{(2)}. \quad (3.3.1.27)$$

Из (3.3.1.27) следует, что

$$\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23} \leq 0, \qquad (3.3.1.28)$$

$$\frac{\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}}{\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}^{(1)}} = t_{03} \leq 0. \qquad (3.3.1.29)$$

Таким образом, в оптимальном расширенном решении на параметр t будет накладываться условие (3.3.1.13), так как

$$max\left(t_{03} = \frac{\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}}{\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}^{(1)}}; 0\right) = 0, \qquad (3.3.1.30)$$

$$min\left(t_{01} = \frac{\beta_{21} - \beta_{21}^{(2)}}{\beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)}}; 1\right) = 1. \qquad (3.3.1.31)$$

Записываем оптимальное расширенное решение прямой задачи

$$X^* = \left(\frac{b_2}{a_{21}} \cdot t; \frac{b_2}{a_{22}} \cdot (1 - t)\right), \qquad (3.3.1.32)$$

$$Y^* = \left(b_2\left(\beta_{21} - \beta_{21}^{(2)} - t \cdot \left(\beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)}\right)\right); 0; b_2\left(t \cdot \left(\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}^{(1)}\right) - \left(\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}\right)\right)\right),$$

(3.3.1.33)

где параметр t удовлетворяют условиям (3.3.1.13),

$$Z_{max} = c_1 \cdot n_{21} = c_2 \cdot n_{22}. \quad (3.3.1.34)$$

Отметим, что в этом случае прямая задача имеет множество решений, среди которых есть планы, по которым выпускается только продукция A_1 и только продукция A_2. Таким образом, осуществляется переход от одного способа производства к другому (от одной технологии к другой).

Среди оптимальных остатков остаток ресурса R_1 может быть нулевым, когда $n_{11}=n_{21}$. Также среди оптимальных остатков остаток ресурса R_3 может быть нулевым, когда $n_{32}=n_{22}$.

Найдём решение двойственной задачи. Так как среди оптимальных значений остатков ресурсов R_1 и R_3 есть ненулевые, то в двойственной задаче

$$u_1^* = u_3^* = 0. \quad (3.3.1.35)$$

Так как среди оптимальных значений x_1^* и x_2^* есть ненулевые, то

$$v_1^* = v_2^* = 0. \quad (3.3.1.36)$$

Для системы (1.2), из условий (3.3.1.35) и (3.3.1.36) значение u_2^* равно

$$u_2^* = \frac{c_1}{a_{21}} = p_{21} = \frac{c_2}{a_{22}} = p_{22}. \quad (3.3.1.37)$$

Таким образом, расширенное решение в двойственной задаче будет

$$U^* = (0; p_{21}; 0), \qquad (3.3.1.38)$$

$$V^* = (0; 0), \qquad (3.3.1.39)$$

$$W_{min} = b_2 \cdot p_{21}, \qquad (3.3.1.40)$$

которое является единственным.

Ресурс R_2 является дефицитным. Статус ресурсов R_1 и R_3 не будет дефицитным и зависит от равенства значений n_{11} и n_{32} значениям n_{21} и n_{22} соответственно.

1) Если $n_{11}>n_{21}$ и $n_{32}>n_{22}$, то ресурсы R_1 и R_3 избыточные;

2) Если $n_{11}=n_{21}$ и $n_{32}>n_{22}$, то ресурс R_3 избыточный, а ресурс R_1 избыточным не является, так как среди его оптимальных остатков есть нулевой остаток;

3) Если $n_{11}>n_{21}$ и $n_{32}=n_{22}$, то ресурс R_1 избыточный, а ресурс R_3 избыточным не является, так как среди его оптимальных остатков есть нулевой остаток;

4) Если $n_{11}=n_{21}$ и $n_{32}=n_{22}$, то ресурсы R_1 и R_3 избыточными не являются, так как среди их оптимальных остатков есть нулевые остатки.

3.3.2. Значение n_1 равно n_{21}, значение n_2 равно n_{32}

Пусть n_1 равно значению n_{21}, а n_2 равно значению n_{32}. Решение прямой задачи будем также искать в виде (3.3.1.1).

Снова, из условия $n_1=n_{21}$ следует, что $n_{11}\geq n_{21}$, а $n_{21}>n_{22}$, [1]. Это означает, что в системе неравенств (1.1) первое неравенство выполняется автоматически.

Также оптимальные планы удовлетворяют второму ограничению, выполняемому как равенство (3.3.1.2), и третьему ограничению:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3. \quad (3.3.2.1)$$

Откуда получаем, что $t_1+t_2=1$ и выполняется условие положительности для параметров t_1 и t_2. Таким образом, получаем, что оптимальные значения переменных x_1 и x_2 равны (3.3.1.3).

где параметры t_1 и t_2 удовлетворяют условиям (3.3.1.4) и (3.3.1.5), а также условию:

$$\beta_{23}^{(1)} \cdot t_1 + \beta_{23}^{(2)} \cdot t_2 \leq \beta_{23}. \quad (3.3.2.2)$$

Оптимальные значения остатков ресурсов для ресурсов будут такими же, как и в пункте 3.3.1, (3.3.1.6), где t_1 и t_2 удовлетворяют условиям (3.3.1.4), (3.3.2.2) и (3.3.1.5).

Выразим параметры t_1 и t_2 через параметр t по формулам (3.3.1.8) и рассмотрим возможные условия на него. Он также должен удовлетворять условию (3.3.1.21). Так как $n_{11}\geq n_{21}$, то выполняется условие (3.3.1.31). Так как $n_{22}\geq n_{32}$, то выполняется условие

$$max\left(t_{03} = \frac{\beta_{23}^{(2)}-\beta_{23}}{\beta_{23}^{(2)}-\beta_{23}^{(1)}}; 0\right) = \frac{\beta_{23}^{(2)}-\beta_{23}}{\beta_{23}^{(2)}-\beta_{23}^{(1)}}, \qquad (3.3.2.3)$$

потому что

$$\beta_{23} = \frac{b_3}{b_2} \leq \frac{a_{32}}{a_{22}} = \beta_{23}^{(2)}. \qquad (3.3.2.4)$$

Таким образом, на параметр t накладывается условие

$$t_{03} = \frac{\beta_{23}^{(2)}-\beta_{23}}{\beta_{23}^{(2)}-\beta_{23}^{(1)}} \leq t \leq 1. \qquad (3.3.2.5)$$

В итоге расширенное решение прямой задачи определяется формулами (3.3.1.32), (3.3.1.33) и (3.3.1.34), в которых t удовлетворяет условию (3.3.2.5).

Отметим, что в этом случае прямая задача также имеет множество решений, среди которых есть планы, по которым выпускается только продукция A_1. Переход от одного способа производства к другому осуществляется не полностью (возможно использование только первой технологии или двух технологий сразу).

Среди оптимальных остатков остаток ресурса R_1 может быть нулевым, когда $m_{11}=n_{21}$. Также среди оптимальных остатков остаток ресурса R_3 может быть нулевым, когда параметр t равняется

$$t = t_{03} = \frac{\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}}{\beta_{23}^{(2)} - \beta_{23}^{(1)}}. \quad (3.3.2.6)$$

Расширенной решение двойственной задачи совпадает с расширенным решением пункта 3.3.1, определяется формулами (3.3.1.38), (3.3.1.39) и (3.3.1.40), которое является единственным.

Ресурс R_2 является дефицитным, R_3 избыточным не является, так как среди его оптимальных остатков есть нулевой остаток. Статус ресурса R_1 зависит от равенства значения m_{11} значению n_{21}.

1) Если $m_{11}>n_{21}$, то ресурс R_1 избыточный;

2) Если $m_{11}=n_{21}$, то ресурс R_1 избыточным не является, так как среди его оптимальных остатков есть нулевой остаток.

3.3.3. Значение m_1 равно m_{11}, значение n_2 равно n_{22}

Теперь рассмотрим случай, когда m_1 равно значению m_{11}, а n_2 равно значению n_{22}. Решение прямой задачи опять будем искать в виде (3.3.1.1).

Снова, из условия $n_2=n_{22}$ следует, что $n_{32}\geq n_{22}$, а $n_{31}>n_{32}$, [1]. Это означает, что в системе неравенств (1.1) третье неравенство выполняется автоматически.

Также оптимальные планы удовлетворяют второму ограничению, выполняемому как равенство (3.3.1.2), и первому ограничению:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1. \quad (3.3.3.1)$$

Откуда получаем, что $t_1+t_2=1$, выполняется условие положительности для параметров t_1 и t_2. Как и в пунктах 3.1 и 3.2, получаем, что оптимальные значения переменных x_1 и x_2 равны (3.3.1.3), где параметры t_1 и t_2 удовлетворяют условиям (3.3.1.4) и (3.3.1.5), а также условию:

$$\beta_{21}^{(1)} \cdot t_1 + \beta_{21}^{(2)} \cdot t_2 \leq \beta_{21}. \quad (3.3.3.2)$$

Снова оптимальные значения остатков ресурсов будут такими же, как и в пункте 3.3.1, (3.3.1.6), где t_1 и t_2 удовлетворяют условиям (3.3.1.4), (3.3.3.2) и (3.3.1.5).

Опять выражаем параметры t_1 и t_2 через параметр t по формулам (3.3.1.8). Он должен удовлетворять условию (3.3.1.21). Так как $n_{32}\geq n_{22}$, то выполняется условие (3.3.1.30). Так как $n_{21}\geq m_{11}$, то выполняется условие

$$min\left(t_{01} = \frac{\beta_{21} - \beta_{21}^{(2)}}{\beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)}}; 1\right) = \frac{\beta_{21} - \beta_{21}^{(2)}}{\beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)}}. \quad (3.3.3.3)$$

потому что

$$\beta_{21} = \frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_{11}}{a_{21}} = \beta_{21}^{(1)}. \quad (3.3.3.4)$$

Теперь на параметр t накладывается условие

$$0 \le t \le t_{01} = \frac{\beta_{21}-\beta_{21}^{(2)}}{\beta_{21}^{(1)}-\beta_{21}^{(2)}}. \qquad (3.3.3.5)$$

В итоге расширенное решение прямой задачи определяется формулами (3.3.1.32), (3.3.1.33) и (3.3.1.34), в которых t удовлетворяет условию (3.3.3.5).

Снова прямая задача также имеет множество решений, среди которых есть планы, по которым выпускается только продукция A_2. Переход от одного способа производства к другому осуществляется не полностью (возможно использование только второ технологии или двух технологий сразу).

Среди оптимальных остатков остаток ресурса R_3 может быть нулевым, когда $n_{32}=n_{22}$. Среди оптимальных остатков остаток ресурса R_1 может быть нулевым, когда параметр t равняется

$$t = t_{01} = \frac{\beta_{21}-\beta_{21}^{(2)}}{\beta_{21}^{(1)}-\beta_{21}^{(2)}}. \ (3.3.3.6)$$

Расширенной решение двойственной задачи совпадает с расширенным решением пункта 3.3.1 и 3.3.2, определяется формулами (3.3.1.38), (3.3.1.39) и (3.3.1.40), которое является единственным.

Ресурс R_2 является дефицитным. Теперь R_1 избыточным не является, так как среди его оптимальных остатков есть нулевой остаток, а статус ресурса R_3 зависит от равенства значения n_{32} значению n_{22}.

1) Если $n_{32}>n_{22}$, то ресурс R_3 избыточный;

2) Если $n_{32}=n_{22}$, то ресурс R_3 избыточным не является, так как среди его оптимальных остатков есть нулевой остаток.

3.4. Значение n_1 равно n_{11} и n_2 равно n_{32}

Осталось рассмотреть случай, когда значения n_1 и n_2 n_1 равны соответственно значениям n_{11} и n_{32}. Это означает, что минимумы отношений запасов ресурсов и удельных расходов для видов продукций A_1 и A_2 достигаются соответственно для ресурса R_1 и R_3. Полагаем, что для значений n_{21} и n_{22} должны выполняться условия: $n_{21}>n_{11}$, $n_{22}>n_{32}$. Случаи $n_1=n_{11}$, $n_{22}\le n_{32}$ и $n_{21}\le n_{11}$, $n_2=n_{32}$ мы уже рассматривали соответственно в пунктах 3.3.3 и 3.3.2.

При $k=k_2$ уравнение границы решения второго неравенства системы (1) будет линией уровня. Поэтому поиск оптимальных планов зависит от допустимости планов границы решений второго неравенства системы (1). Рассмотрим три случая пересечения границы решений второго неравенства системы (1) с ОДР этой системы: 1) пересечение является множеством планов; 2) пересечение имеет один план; 3) нет пересечения границы решения второго неравенства системы (1) и её ОДР.

В качестве критерия возможного вида пересечения используем допустимость второму ограничению системы (1) плана, при котором первое и третье неравенства системы (1) выполняются как равенства:

$$X_{13} = \left(n_{11} \cdot \frac{\beta_{13}^{(2)}-\beta_{13}}{\beta_{13}^{(2)}-\beta_{13}^{(1)}}; n_{12} \cdot \frac{\beta_{13}-\beta_{13}^{(1)}}{\beta_{13}^{(2)}-\beta_{13}^{(1)}}\right). \qquad (3.4.1)$$

Если при плане X_{13} второе ограничение не выполняется, то будет наблюдаться первый случай. Если при плане X_{13} второе ограничение выполняется как равенство, то будет наблюдаться второй случай. Если же при плане X_{13} второе ограничение выполняется как строгое неравенство, то будет наблюдаться третий случай.

3.4.1. Расход ресурса R_2 по плану X_{13} превышает его запас

Анализ оптимального решения задачи начнём со случая, когда запаса ресурса R_2 не достаточно для выполнения плана X_{13}, которое выражается неравенством

$$a_{21} \cdot n_{11} \cdot \frac{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}} + a_{22} n_{12} \cdot \frac{\beta_{13} - \beta_{13}^{(1)}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}} > b_2. \qquad (3.4.1.1)$$

Проверим допустимость плана X_{12}, при котором полностью расходуются ресурсы R_1 и R_2:

$$X_{12} = \left(n_{11} \cdot \frac{\beta_{12}^{(2)} - \beta_{12}}{\beta_{12}^{(2)} - \beta_{12}^{(1)}}; n_{12} \cdot \frac{\beta_{12} - \beta_{12}^{(1)}}{\beta_{12}^{(2)} - \beta_{12}^{(1)}} \right). \qquad (3.4.1.2)$$

Обозначим сомножитель при n_{11} через t_{12}:

$$t_{12} = \frac{\beta_{12}^{(2)} - \beta_{12}}{\beta_{12}^{(2)} - \beta_{12}^{(1)}}. \qquad (3.4.1.3)$$

Тогда сомножитель при n_{12} будет равен

$$\frac{\beta_{12}^{(2)} - \beta_{12}}{\beta_{12}^{(2)} - \beta_{12}^{(1)}} = 1 - t_{12}. \qquad (3.4.1.4)$$

Также обозначим t_{13} выражение:

$$t_{13} = \frac{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}}. \qquad (3.4.1.5)$$

Тогда

$$\frac{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}} = 1 - t_{13}. \qquad (3.4.1.6)$$

Используя формулы (3.4.1.3)-(4.3.1.6) запишем условие (3.4.1.1) в виде

$$a_{21} \cdot n_{11} \cdot t_{13} + a_{22} n_{12} \cdot (1 - t_{13}) > a_{21} \cdot n_{11} \cdot t_{12} + a_{22} n_{12} \cdot (1 - t_{12}), \qquad (3.4.1.7)$$

так как при плане X_{12} ресурс R_2 расходуется полностью.

Докажем, что

$$a_{31} \cdot n_{11} \cdot t_{12} + a_{32} n_{12} \cdot (1 - t_{12}) < a_{31} \cdot n_{11} \cdot t_{13} + a_{32} n_{12} \cdot (1 - t_{13}), \qquad (3.4.1.8)$$

Из неравенства (3.4.1.7) следует:

$$a_{22} n_{12} \cdot (t_{12} - t_{13}) > a_{21} \cdot n_{11} \cdot (t_{12} - t_{13}), \qquad (3.4.1.10)$$

$$\beta_{12}^{(2)} \cdot (t_{12} - t_{13}) > \beta_{12}^{(1)} \cdot (t_{12} - t_{13}), \qquad (3.4.1.11)$$

$$t_{12} \cdot \left(\beta_{12}^{(2)} - \beta_{12}^{(1)} \right) > t_{13} \cdot \left(\beta_{12}^{(2)} - \beta_{12}^{(1)} \right). \qquad (3.4.1.12)$$

Из условия (1.5) следует, что

$$\beta_{12}^{(2)} > \beta_{12}^{(1)}. \qquad (3.4.1.13)$$

Из неравенств (3.4.1.12) и (3.4.1.13) следует

$$t_{12} > t_{13}. \qquad (3.4.1.14)$$

Докажем неравенство (3.4.1.8). Для этого определим знак выражения

$$a_{31} \cdot n_{11} \cdot t_{12} + a_{32} n_{12} \cdot (1 - t_{12}) - a_{31} \cdot n_{11} \cdot t_{13} + a_{32} n_{12} \cdot (1 - t_{13}). \qquad (3.4.1.15)$$

Раскрываем скобки в выражении (3.4.1.15) и преобразуем выражение

$$a_{31} \cdot n_{11} \cdot (t_{12} - t_{13}) - a_{32} n_{12} \cdot (t_{12} - t_{13}), \qquad (3.4.1.16)$$

из определений (2.1) и (2.3) выражение (3.4.1.16) будет равно

$$b_1 \cdot \beta_{13}^{(1)} \cdot (t_{12} - t_{13}) - b_1 \cdot \beta_{13}^{(2)} \cdot (t_{12} - t_{13}), \qquad (3.4.1.17)$$

$$b_1 \cdot \left(\beta_{13}^{(1)} - \beta_{13}^{(2)}\right) \cdot (t_{12} - t_{13}). \qquad (3.4.1.18)$$

Выражение (3.4.1.18) меньше нуля, так как сомножитель b_1 положительный по определению, второй сомножитель отрицательный согласно (1.5), так как

$$\beta_{13}^{(1)} < \beta_{13}^{(2)}, \quad (3.4.1.19)$$

третий сомножитель положительный из неравенства (3.4.14).

Таким образом, выполняется неравенство (3.4.1.8), которое можно записать в виде:

$$a_{31} \cdot n_{11} \cdot t_{12} + a_{32} n_{12} \cdot (1 - t_{12}) < b_3. \qquad (3.4.1.20)$$

В результате, для плана X_{12} в системе (1.1) ограничение для ресурса R_1 выполняется как равенство, ограничение для ресурса R_2 выполняется также как равенство, ограничение для ресурса R_3 выполняется как строгое неравенство. План X_{12} допустимый, а значит оптимальный.

Аналогично доказывается допустимость плана, при котором полностью расходуются ресурсы R_2 и R_3, который мы обозначим X_{23}:

$$X_{23} = \left(n_{31} \cdot \frac{\beta_{32} - \beta_{32}^{(2)}}{\beta_{32}^{(1)} - \beta_{32}^{(2)}}; n_{32} \cdot \frac{\beta_{32}^{(2)} - \beta_{32}}{\beta_{32}^{(1)} - \beta_{32}^{(2)}}\right). \qquad (3.4.1.21)$$

Как и план X_{12}, план X_{23} тоже оптимальный. Это означает, что задача имеет множество допустимых планов.

Оптимальный план, как и в пункте 3.3.1, будем искать виде (3.3.1.9) с условием (3.3.1.21). Планы X_{12} и X_{23} являются граничными решениями, получаются из плана (3.3.1.9) при значениях соответственно t=t_{01} (выражение (3.3.1.18)) и t=t_{03} (выражение (3.3.1.19)).

Расширенное решение прямой задачи определяется формулами пункта 3.3.1 (3.3.1.32)-(3.3.1.34), где параметр t удовлетворяют условиям (3.3.1.20),

В двойственной задаче расширенное решение определяется формулами (3.3.1.38)- (3.3.1.40), которое является единственным.

Анализ использования ресурсов такой же, как и четвёртый анализ пункта 3.3.1: ресурс R_2 является дефицитным, ресурсы R_1 и R_3 не являются дефицитными, но избыточными не являются, так как среди их оптимальных остатков есть нулевые остатки.

3.4.2. Расход ресурса R_2 по плану X_{13} равен его запасу

Перейдём ко второму случаю расхода ресурса R_2 по плану X_{13}. По плану X_{13} расход ресурса равен его запасу R_2. Это условие определяется равенством

$$a_{21} \cdot n_{11} \cdot \frac{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}} + a_{22} n_{12} \cdot \frac{\beta_{13} - \beta_{13}^{(1)}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}} = b_2. \qquad (3.4.2.1)$$

Тогда план X_{13} будет и допустимым и оптимальным, для него выполняется условие $t_{12} = t_{13}$. (3.4.2.2)

Отметим, что планы X_{13}, X_{12} и X_{23} в этом случае совпадают, прямая задача имеет единственное решение, оптимальные остатки всех ресурсов равны нулю. Максимальное значение целевой функции равно $c_1 n_{21}$, что в свою очередь равно $c_2 n_{22}$, (3.3.1.34).

Найдём решение двойственной задачи. Так как все оптимальные значения остатков ресурсов равны нулю, то оптимальные оценки ресурсов могут быть ненулевыми:

$$u_1^* \geq 0,\ u_2^* \geq 0,\ u_3^* \geq 0. \qquad (3.4.2.3)$$

Так при плане X_{13} выпускается продукция обоих видов, то оптимальные оценки производства обоих видов продукции равны нулю, выполняется условие (3.3.1.36).

Оптимальное решение в двойственной задаче, как и в пункте 3.1.4, будем искать в виде:

$$u_1^* = p_{11} \cdot t_1,\ u_2^* = p_{21} \cdot t_2,\ u_3^* = p_{31} \cdot t_3, \quad (3.4.2.4)$$

где значения параметров t_1, t_2 и t_3 положительные и удовлетворяют условиям (3.1.4.6) и

$$k_1 \cdot t_1 + k_2 \cdot t_2 + k_3 \cdot t_3 = k_2. \qquad (3.4.2.5)$$

Интервалы значений параметров t_1, t_2 и t_3 определяются по формулам для условия (1.5):

$$0 \leq t_1 \leq \frac{k_3 - k_2}{k_3 - k_1}, \qquad (3.4.2.6)$$

t_2 по формуле (3.1.4.10),

$$0 \leq t_3 \leq \frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1}. \qquad (3.4.2.7)$$

Интервалы значений оптимальных оценок ресурсов равны:

$$0 \leq u_1^* \leq p_{11} \cdot \frac{k_3 - k_2}{k_3 - k_1}, \quad (3.4.2.8)$$

u_2^* по формуле (3.1.4.13),

$$0 \leq u_3^* \leq p_{31} \cdot \frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1}. \quad (3.4.2.9)$$

Оптимальные значения оценок определяются, как и в пункте 3.1.4, (3.1.4.3), оптимальные значения оценок способов производства определяются

$$V^* = (0; 0), \qquad (3.4.2.10)$$

где значения параметров t_1, t_2 и t_3 положительные и удовлетворяют условиям (3.1.4.6) и (3.4.2.5), минимальное значение целевой функции равно $b_2 p_{21}$ или $b_2 p_{22}$, (3.1.4.5).

Статусы всех ресурсов не будут дефицитными, но и избыточными не являются, так как среди их оптимальных остатков есть нулевые остатки.

3.4.3. Расход ресурса R_2 по плану X_{13} меньше его запаса

Осталось рассмотреть случай, когда для выполнения плана X_{13} ресурс R_2 расходуется не полностью. Это условие выражается неравенством

$$a_{21} \cdot n_{11} \cdot \frac{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}} + a_{22} \cdot n_{12} \cdot \frac{\beta_{13} - \beta_{13}^{(1)}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}} < b_2. \qquad (3.4.3.1)$$

Тогда план X_{13} будет оптимальным и единственным. Расширенное решение прямой задачи определяется формулами

$$X^* = \left(n_{11} \cdot \frac{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}}; n_{12} \cdot \frac{\beta_{13} - \beta_{13}^{(1)}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}}\right), \qquad (3.4.3.2)$$

$$Y^* = \left(0; b_2 - a_{21} \cdot n_{11} \cdot \frac{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}} - a_{22} \cdot n_{12} \cdot \frac{\beta_{13} - \beta_{13}^{(1)}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}}; 0\right), \qquad (3.4.3.3)$$

$$Z_{max} = c_1 \cdot n_{11} \cdot \frac{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}} + c_2 \cdot n_{12} \cdot \frac{\beta_{13} - \beta_{13}^{(1)}}{\beta_{13}^{(2)} - \beta_{13}^{(1)}}. \qquad (3.4.3.4)$$

Отметим, что максимальное значение целевой функции меньше $c_1 n_{21}$.

Расширенное решение двойственной задачи определяется из условий

$$a_{11} \cdot u_1^* + a_{31} \cdot u_3^* = c_1, \qquad (3.4.3.5)$$

$$a_{12} \cdot u_1^* + a_{32} \cdot u_3^* = c_2, \qquad (3.4.3.6)$$

Так как оптимальная оценка ресурса R_2 равна нулю (ресурс избыточный), оценки способов производства равны нулю, так как оба вида продукции при оптимальном плане выпускаются.

Решение системы уравнений (3.4.3.5)-(3.4.3.6)

$$u_1^* = p_{11} \cdot \frac{k_3 - k_2}{k_3 - k_1},\ u_3^* = p_{31} \cdot \frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1}. \qquad (3.4.3.7)$$

Таким образом, расширенное решение в двойственной задаче будет

$$U^* = \left(p_{11} \cdot \frac{k_3 - k_2}{k_3 - k_1}; 0; p_{31} \cdot \frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1}\right), \qquad (3.4.3.9)$$

$$V^* = (0; 0), \qquad (3.4.3.10)$$

$$W_{min} = b_1 \cdot p_{11} \cdot \frac{k_3 - k_2}{k_3 - k_1} + b_3 \cdot p_{31} \cdot \frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1}. \qquad (3.4.3.11)$$

Ресурсы R_1 и R_3 будут дефицитными, а ресурс R_2 избыточный.

Выводы

Рассмотрено влияние особых рыночных условий на выпуск продукции, когда k равно k_2, (1.8). Последовательно исследованы оптимальные планы выпуска двух видов продукции с использованием ресурсов при различных значениях показателей n_1 и n_2: 1) $n_1=n_{31}$; 2) $n_2=n_{12}$; 3) $n_1=n_{21}$; $n_2=n_{22}$; 4) $n_1=n_{21}$, а $n_2=n_{32}$; 5) $n_1=n_{11}$, а $n_2=n_{22}$; 6) $n_1=n_{11}$, а $n_2=n_{32}$.

1) При $n_1=n_{31}$, пункт 3.1, оптимальным в прямой задачи будет план (3.1.3), при котором выпускается только продукция A_1 в количестве n_{31}, нулевой остаток ресурса R_3, (3.1.4), а остатки ресурсов R_1 и R_2 зависят от значений показателей n_{11} и n_{21}. Максимальное значение целевой функции равно $c_1 \cdot n_{31}$, (3.1.5).

Если $n_{11} \neq n_{31}$ и $n_{21} \neq n_{31}$, (3.1.1.1), то остатки ресурсов R_1 и R_2 ненулевые – они являются избыточными. Оценка полезности ресурса R_3 равна p_{31}, (3.1.1.2), он является дефицитным. Так как оценка способа производства продукции A_2 равна

$c_1 \cdot (k_3 - k_2)$, (3.1.1.3), строго больше нуля по условию (1.5), продукцию A_2 выпускать не выгодно (используется только первая технология).

Если $n_{11}=n_{31}$ и $n_{21} \neq n_{31}$, (3.1.2.1), то остаток ресурса R_1 равен нулю, а ресурса R_2 нет (3.1.2.2), ресурс R_2 избыточный. Оценки полезности ресурсов R_1 и R_3 не единственные, определяются из формулы (3.1.2.3), где параметры t_1 и t_3 определяются условиями (3.1.2.6) и (3.1.2.7). Оценка полезности ресурса R_1 может обращаться в ноль, (3.1.2.10), ресурс не является дефицитным. Оценка полезности ресурса R_3 в ноль не обращаться, (3.1.2.11), ресурс R_3 является дефицитным. Оценка способа производства продукции A_2 определяется формулой (3.1.2.4), может не равняться нулю, продукцию A_2 выпускать не выгодно (используется только первая технология).

Если $n_{11} \neq n_{31}$ и $n_{21}=n_{31}$, (3.1.3.1), то остаток ресурса R_1 не равен нулю, а ресурса R_2 равен (3.1.3.2), ресурс R_1 избыточный. Оценки полезности ресурсов R_2 и R_3 не единственные, определяются из формулы (3.1.3.3), где параметры t_2 и t_3 определяются условиями (3.1.3.6) и (3.1.3.7). Оценки полезности ресурсов R_2 и R_3 могут обращаться в ноль, (3.1.3.10) и (3.1.3.11), ресурсы R_2 и R_3 не являются дефицитными. Оценка способа производства продукции A_2 определяется формулой (3.1.3.4), может не равняться нулю, продукцию A_2 выпускать не выгодно (используется только первая технология).

Если $n_{11}=n_{31}$ и $n_{21}=n_{31}$, (3.1.4.1), то остатки всех ресурсов равны нулю, (3.1.4.2). Оценки полезности ресурсов не единственные, определяются из формулы (3.1.4.3), где параметры t_1, t_2 и t_3 определяются условиями (3.1.4.6) и (3.1.4.7). Оценки полезности ресурсов R_1, R_2 и R_3 могут обращаться в ноль, (3.1.4.12)-(3.1.4.14), ресурсы R_1, R_2 и R_3 не являются дефицитными. Оценка способа производства продукции A_2 определяется формулой (3.1.4.4), может не равняться нулю, продукцию A_2 выпускать не выгодно (используется только первая технология).

2) При $n_2=n_{12}$, пункт 3.2, оптимальным в прямой задачи будет план (3.2.3), при котором выпускается только продукция A_2 в количестве n_{12}, нулевой остаток ресурса R_1, (3.2.4), а остатки ресурсов R_2 и R_3 зависят от значений показателей n_{22} и n_{32}. Максимальное значение целевой функции равно $c_2 \cdot n_{12}$, (3.2.5).

Если $n_{22} \neq n_{12}$ и $n_{32} \neq n_{12}$, (3.2.1.1), то остатки ресурсов R_2 и R_3 ненулевые – они являются избыточными. Оценка полезности ресурса R_1 равна p_{21}, (3.2.1.2), он является дефицитным. Так как оценка способа производства продукции A_1 равна $c_1 \cdot (1/k_1 - 1/k_2)$, (3.2.1.3), строго больше нуля по условию (1.5), продукцию A_1 выпускать не выгодно (используется только вторая технология).

Если $n_{22}=n_{12}$ и $n_{32} \neq n_{12}$, (3.2.2.1), то остаток ресурса R_2 равен нулю, а ресурса R_3 нет (3.2.2.2), ресурс R_3 избыточный. Оценки полезности ресурсов R_1 и R_2 не единственные, определяются из формулы (3.2.2.3), где параметры t_1 и t_2 определяются условиями (3.2.2.6) и (3.2.2.7). Оценка полезности ресурсов R_1 и R_2 могут обращаться в ноль, (3.2.2.10), (3.2.2.11), ресурсы не являются дефицитными. Оценка способа производства продукции A_1 определяется формулой (3.2.2.4), может не равняться нулю, продукцию A_1 выпускать не выгодно (используется только вторая технология).

Если $n_{22} \neq m_{12}$ и $n_{32}=m_{12}$, (3.2.3.1), то остаток ресурса R_2 не равен нулю, а ресурса R_3 равен (3.2.3.2), ресурс R_2 избыточный. Оценки полезности ресурсов R_1 и R_3 не единственные, определяются из формулы (3.2.3.3), где параметры t_1 и t_3 определяются условиями (3.2.3.6) и (3.2.3.7). Оценка полезности ресурса R_3 может обращаться в ноль, (3.2.3.15), ресурс не является дефицитным. Оценка полезности ресурса R_1 в ноль не обращаться, (3.2.2.14), ресурс R_1 является дефицитным. Оценка способа производства продукции A_1 определяется формулой (3.2.3.4), может не равняться нулю, продукцию A_1 выпускать не выгодно (используется только вторая технология).

Если $m_{11}=n_{31}$ и $n_{21}=n_{31}$, (3.2.4.1), то остатки всех ресурсов равны нулю, (3.2.4.2). Оценки полезности ресурсов не единственные, определяются из формулы (3.2.4.3), где параметры t_1, t_2 и t_3 определяются условиями (3.2.4.6) и (3.2.4.7). Оценки полезности ресурсов R_1, R_2 и R_3 могут обращаться в ноль, (3.2.4.12)-(3.2.4.14), ресурсы R_1, R_2 и R_3 не являются дефицитными. Оценка способа производства продукции A_1 определяется формулой (3.2.4.4), может не равняться нулю, продукцию A_1 выпускать не выгодно (используется только вторая технология).

3) При $n_1=n_{21}$ и $n_2=n_{22}$, пункт 3.3.1, задача ОИР имеет неединственное решение, (3.3.1.9), а остатки ресурсов определяются формулами (3.3.1.10)-(3.3.1.12), где параметр t должен удовлетворять условию (3.3.1.13). Остатки ресурсов R_1 и R_3 можно также определить по формулам (3.3.1.14) и (3.3.1.15). Это именно то решение, которое определяет влияние особых рыночных условий при $k=k_2$. Среди оптимальных есть план, при котором выпускается только продукция A_1, и есть план, при котором выпускается только продукция A_2. Максимальное значение целевой функции равно $c_1 \cdot n_{21}$ или $c_2 \cdot n_{22}$, (3.3,1.34). При данных значениях удельных затрат ресурсов, их запасов и рыночных условиях возможен переход без изменения максимального значения целевой функции от плана, при котором производится только продукция A_1, к плану, при котором производится только продукция A_2. Утверждать, что продукцию обоих видов выпускать целесообразно, будет неверным, так как среди оптимальных планов есть план, при которых продукция A_1 не выпускается, и план, при котором продукция A_2 не выпускается.

Ресурс R_2 дефицитный, так как его предельная оценка равна $p_{21}=p_{22}$, не зависит от значений m_{11} и n_{32}. Статус ресурсов R_1 и R_3 определяются остатками ресурсов и расширенным решением двойственной задачи для различных значений m_{11} и n_{32}. Ресурс R_2 дефицитный не зависимо от значений m_{11} и n_{32}. Рассмотрим случаи: 1) $m_{11}>n_{21}$ и $n_{32}>n_{22}$; 2) $m_{11}=n_{21}$ и $n_{32}>n_{22}$; 3) $m_{11}>n_{21}$ и $n_{32}=n_{22}$.

Если $m_{11}>n_{21}$ и $n_{32}>n_{22}$, то ресурсы R_1 и R_3 избыточные.

Если $m_{11}=n_{21}$ и $n_{32}>n_{22}$, то ресурс R_3 избыточный, а ресурс R_1 избыточным не является, так как среди его оптимальных остатков есть нулевой остаток.

Если $m_{11}>n_{21}$ и $n_{32}=n_{22}$, то ресурс R_1 избыточный, а ресурс R_3 избыточным не является, так как среди его оптимальных остатков есть нулевой остаток.

Если $n_{11}=n_{21}$ и $n_{32}=n_{22}$, то ресурсы R_1 и R_3 избыточными не являются, так как среди их оптимальных остатков есть нулевые остатки.

Во всех четырёх случаях оценки предельных полезностей ресурсов R_1 и R_3 равны нулю, они не являются дефицитными.

Оценки способа производства обоих видов продукции A_1 и A_2 равны нулю, что означает максимальную эффективность использования ресурса R_2 (его предельная полезность равна $p_{21}=p_{22}$, (3.3.1.38)) в производстве этих видов продукции.

4) При $n_1=n_{21}$ и $n_2=n_{32}$, пункт 3.3.2, также задача ОИР имеет неединственное решение, (3.3.1.9), а остатки ресурсов определяются формулами (3.3.1.10)-(3.3.1.12), где параметр t должен удовлетворять условию (3.3.2.5). Это решение тоже определяется влиянием особых рыночных условий при $k=k_2$. Среди оптимальных планов есть план, при котором выпускается только продукция A_1. Максимальное значение целевой функции также равно $c_1 \cdot n_{21}$ или $c_2 \cdot n_{22}$, (3.3,1.34). Утверждать, что продукцию A_2 выпускать целесообразно, будет неверным, так как среди оптимальных планов есть план, при котором продукция A_2 не выпускается.

Ресурс R_2 дефицитный, так как его предельная оценка равна $p_{21}=p_{22}$, не зависит от значений n_{11} и n_{32}. Ресурс R_3 не дефицитный и не является избыточным, так как среди оптимальных остатков есть нулевой остаток. Статус ресурсов R_1 определяется его остатком и расширенным решением двойственной задачи для различных значений n_{11}. Если $n_{11}>n_{21}$, то ресурс R_1 избыточный. Если $n_{11}=n_{21}$, то ресурс R_1 избыточным не является, так как среди его оптимальных остатков есть нулевой остаток.

Также оценки способа производства обоих видов продукции A_1 и A_2 равны нулю, что означает максимальную эффективность использования ресурса R_2 в производстве этих видов продукции.

5) И при $n_1=n_{11}$ и $n_2=n_{22}$, пункт 3.3.3, задача ОИР имеет неединственное решение, (3.3.1.9), а остатки ресурсов определяются формулами (3.3.1.10)-(3.3.1.12), где параметр t должен удовлетворять условию (3.3.3.5). Это решение тоже определяется влиянием особых рыночных условий при $k=k_2$. Среди оптимальных планов есть план, при котором выпускается только продукция A_2. Максимальное значение целевой функции также равно $c_1 \cdot n_{21}$ или $c_2 \cdot n_{22}$, (3.3,1.34). Утверждать, что продукцию A_1 выпускать целесообразно, будет неверным, так как среди оптимальных планов есть план, при котором продукция A_1 не выпускается.

Опять ресурс R_2 дефицитный, так как его предельная оценка равна $p_{21}=p_{22}$, не зависит от значений n_{11} и n_{32}. Ресурс R_1 не дефицитный и не является избыточным, так как среди оптимальных остатков есть нулевой остаток. Статус ресурсов R_3 определяется его остатком и расширенным решением двойственной задачи для различных значений n_{32}. Если $n_{32}>n_{22}$, то ресурс R_3 избыточный. Если $n_{32}=n_{22}$, то ресурс R_3 избыточным не является, так как среди его оптимальных остатков есть нулевой остаток.

Также оценки способа производства обоих видов продукции A_1 и A_2 равны нулю, что означает максимальную эффективность использования ресурса R_2 в производстве этих видов продукции.

6) Самый сложный для исследования случай, когда $n_1=n_{11}$ и $n_2=n_{32}$, пункт 3.4. В этом случае также может наблюдаться влияние особых рыночных условий при $k=k_2$. Оптимальное решение задача ОИР зависит от допустимости плана X_{13}, при котором полностью расходуются ресурсы R_1 и R_3. Проверка допустимости плана X_{13} зависит от того, как расходуется ресурс R_2 при этом плане. Расход ресурса R_2 по плану X_{13} может превышать его запас, равняться запасу и быть меньше запаса ресурса R_2.

Когда расход ресурса R_2 по плану X_{13} превышает его запас, b_2, то план X_{13} будет недопустимым, расширенное решение прямой задачи определяется формулами пункта 3.3.1 (3.3.1.32)-(3.3.1.34), где параметр t удовлетворяют условиям (3.3.1.20). При оптимальных планах выпускаются оба вида продукции. Остаток ресурса R_2 равен нулю, среди остатков ресурсов R_1 и R_3 есть нулевые и ненулевые, поэтому они избыточными не являются. Максимальное значение целевой функции равняется $c_1 \cdot n_{21}$ или $c_2 \cdot n_{22}$.

Расширенное решение двойственной задачи определяется формулами (3.3.1.38)-(3.3.1.40).

Ресурс R_2 дефицитный, так как его предельная оценка равна $p_{21}=p_{22}$. Ресурсы R_1 и R_3 не дефицитные, так как их оптимальные оценки равны нулю. Оценки способа производства обоих видов продукции A_1 и A_2 равны нулю, что означает максимальную эффективность использования ресурса R_2 в производстве этих видов продукции.

Если расход ресурса R_2 по плану X_{13} равен его запасу, b_2, то при плане X_{13} и ресурс R_2 расходуется полностью, он будет допустимым и оптимальным. Решение прямой задачи единственное, остатки ресурсов равны нулю, максимальное значение целевой функции также равняется $c_1 \cdot n_{21}$ или $c_2 \cdot n_{22}$.

Оптимальные значения оценок определяются, как и в пункте 3.1.4, (3.1.4.3), где значения параметров t_1, t_2 и t_3 положительные и удовлетворяют условиям соответственно (3.4.2.6), (3.1.4.10) и (3.4.2.7). Интервалы значений оптимальных оценок ресурсов удовлетворяют неравенствам (3.4.2.8), (3.1.4.13) и (3.4.2.9). Среди оптимальных оценок ресурсов есть нулевые, поэтому все ресурсы не будут дефицитными.

Оптимальные значения оценок способов производства равны нулю, (3.4.2.10), что опять говорит о максимальной эффективность использования ресурса R_2 в производстве обоих видов продукции. Минимальное значение целевой функции также равно b_2p_{21} или b_2p_{22}, (3.1.4.5).

Если же расход ресурса R_2 по плану X_{13} равен меньше его запаса, то план X_{13} будет допустимым и оптимальным. Решение прямой задачи также будет единственное, влияния особых рыночных условий не наблюдается. Оба вида продукции выпускать выгодно. Остатки ресурсов R_1 и R_3 равны нулю, остаток ресурса ненулевой, (3.4.3.3), он избыточный. Максимальное значение целевой функции определяется формулой (3.4.3.4).

Расширенное решение двойственной задачи определяется формулами (3.4.3.9)- (3.4.3.11). Решение единственное. Ресурсы R_1 и R_3 дефицитные, так как их оценки не равны нулю. Отметим, что максимальное значение целевой функции будет потенциально максимальным для задачи ОИР при меняющихся запасах ресурса R_2.

Общий вывод исследований трёх частей: в особых рыночных условиях возможны переходы от выпуска одной продукции к другой, если для обоих видов продукции ограничивающим будет ресурс, у которого удельные затраты пропорциональны показателям эффективности обоих видов продукции.

Библиографический список

1. Мамонова М.О., Михальчишина Ю.А., Беляева Е.В., Гаврюк С.А. Особые рыночные условия производства двух видов продукции. Часть 1 // Экономические исследования и разработки. 2023. № 12. С. 18-30.

2. Михальчишина Ю.А., Беляева Е.В. Особые рыночные условия производства двух видов продукции. Часть 3 / В сборнике: Актуальные проблемы аграрной науки: прикладные и исследовательские аспекты. сборник научных трудов II Всероссийской (национальной) научно-практической конференции. Нальчик, 2022. С. 271-277.

3. Мамонов О.В. Использование методов линейного программирования при анализе производства продукции. // В сборнике: Актуальные проблемы агропромышленного комплекса сборник трудов научно-практической конференции преподавателей, студентов, магистрантов и аспирантов, посвященный 80-летию Новосибирского ГАУ. Новосибирский государственный аграрный университет. 2016. С. 194-198.

4. Мамонова М.О. Сироткина Л. Н. Отношение предпочтения выпуска двух видов продукции в задаче об использовании ресурсов. Часть 1 / Экономика, управление, финансы и туризм: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции, 10 сентября 2022 г., Москва: Профессиональная наука, 2022. С. 28-49. DOI 10.54092/9781471048616_28

5. Мамонова М.О., Сироткина Л.Н. Отношение предпочтения выпуска двух видов продукции в задаче об использовании ресурсов. Часть 2 / Фундаментальные основы и практические перспективы: сборник научных трудов по материалам Международного симпозиума. Самара, 2023. С. 13-36.

6. Бабин В. Н., Бабина Ю. В. Условие полного расхода всех ресурсов в производстве двух видов продукции. Часть 1 / Теория и практика современной аграрной науки: сборник IV национальной (всероссийской) научной конференции с международным участием. Новосибирск, 2021. С. 1025-1032.

7. Babin, V.N. The rational use of resources provided two products output, part 2 / V.N. Babin, Yu.A. Mikhalchishina, Yu.V. Babina // European Proceedings of Social and Behavioural Sciences: Proceedings of the Conference on Land Economy and Rural Studies Essentials. Omsk: European Publisher, 2022. pp. 103-112. DOI 10.15405/epsbs.2022.02.14

8. Мамонов О.В. Анализ эффективного использования двух ресурсов для предприятия, выпускающего два вида продукции // Агропродовольственная экономика. 2016. № 12. С. 30-62.

9. Мамонов О.В., Елисеева Ю.В. Оптимальные планы производства продукции двух видов с использованием двух ресурсов. / Теория и практика современной аграрной науки. Сборник II Национальной (всероссийской) конференции. 2019. С. 537-542.

10. Мамонов О.В. Анализ использования двух ресурсов предприятия с двумя видами продукции с помощью графического способа решения задачи линейного программирования // Агропродовольственная экономика. 2016. № 10. С. 4-42.

11. Мамонова М.О., Сироткина Л.Н. Поиск границ изменения параметров оптимальных решений в двойственной задаче об оптимальном использовании ресурсов / Роль аграрной науки в устойчивом развитии сельских территорий: сборник VIII Всероссийской (национальной) научной конференции с международным участием. Новосибирск. 2023. С. 817-821.